Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 XI 1947)

§ 1. Большое число важных задач математической физики может быть сведено к сингулярному интегральному уравнению

$$A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt+\int_L\omega(t)\,K(t,t_0)\,dt=f(t_0), \tag{1}$$

где L — простой, достаточно гладкий, замкнутый контур; t и t_0 — аффиксы его точек; $A(t_0)$, $B(t_0)$, $K(t,t_0)$ и $f(t_0)$ — заданные функции, удовлетворяющие некоторым условиям. Содержащийся в левой части уравнения расходящийся интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Изучению этого уравнения, в частности приведению его к уравнению Фредгольма, посвящено значительное число работ *. В них преимущественно предполагается, что

$$A^2(t)-B^2(t)\neq 0 \tag{2}$$

во всех точках контура L.

Исследование системы сингулярных уравнений вида (1) при условии, аналогичном (2), с достаточной полнотой проведено в совместной работе Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа ([3]). В настоящей статье мы имеем в виду указать новый метод сведения сингулярного уравнения (1) к интегральному уравнению Фредгольма в применении к случаю, когда условие (2) не выполняется.

Введем обозначения

$$\Delta_1(t)=A(t)-B(t),\qquad \Delta_2(t)=A(t)+B(t)$$

и рассмотрим два следующие варианта: a) функция $\Delta_1(t)$ обращается в нуль в некоторых точках контура L, но функция $\Delta_2(t)$ всюду на L отлична от нуля, и, наоборот, b) функция $\Delta_1(t)$ на контуре L отлична от нуля, но $\Delta_2(t)$ обращается в нуль в некоторых его точках.

Из приводимых ниже рассуждений нетрудно усмотреть, что в том случае, когда обе функции $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$ обращаются в нуль в некоторых (одних и тех же или различных) точках контура L, сингулярное уравнение (1), вообще говоря, не может быть преобразовано в уравнение Фредгольма.

Разберем сначала подробно первый из указанных вариантов и затем лишь вкратце остановимся на втором из них.

Предположим для простоты, что функция $\Delta_1(t)$ имеет на L лишь один простой корень $t=\alpha$ **. Будем считать, что функции $A(t_0)$, $B(t_0)$,

---

* Литература по этому вопросу приведена в ([1]); см. также статью ([2]), в которой указан новый метод исследования уравнения (1) при условии (2).

** Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда $\Delta_1(t)$ имеет на кривой L несколько корней, некоторые из которых могут быть кратными.

$K(t, t_0)$ и $f(t_0)$ удовлетворяют на всей кривой L условию Гельдера и, кроме того, являются аналитическими от аргумента t_0 в точке $t_0 = \alpha$. Последнее условие может быть заменено более широким и введено здесь только для удобства. Наконец, предположим, что существует решение $\omega(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию Гельдера.

Покажем, что при сформулированных условиях уравнение (1) может быть сведено к уравнению Фредгольма.

Допуская пока, что функция $B(t)$ всюду на кривой L отлична от нуля, введем на L новую функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{B(t)}\left[\{A(t) - B(t)\}\,\omega(t) + \int_L \omega(t_1) K(t_1, t)\,dt_1 - f(t)\right]. \tag{3}$$

Тогда, считая обход кривой L совершающимся против движения часовой стрелки, запишем уравнение (1) в форме

$$\varphi(t_0) + \lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t - z}\,dt = 0, \tag{4}$$

причем предельное значение интеграла типа Коши берется в этом равенстве изнутри области S. Отсюда ясно, что функция $\varphi(t)$ аналитически продолжима в область S. В силу этого и сделанных выше предположений из предшествующего равенства вытекает, что искомое решение $\omega(t)$ будет также аналитически продолжимо в некоторую окрестность точки $t = \alpha$, расположенную в области S. Последнее обстоятельство дает возможность, сначала продолжив аналитически уравнение (4) и затем несколько деформируя в окрестности $t = \alpha$ кривую интегрирования L так, чтобы точка $t = \alpha$ лежала вне новой и весьма близкой к L кривой L', записать его в виде

$$\varphi(z) + \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{\omega(t)}{t - z}\,dt = 0 \tag{5}$$

для всех значений z, принадлежащих области S', содержащейся в S и ограниченной кривой L'.

Положим далее

$$\frac{1}{A(t) - B(t)} = \frac{a}{t - \alpha} + P(t), \quad \frac{B(t)}{A(t) - B(t)} = \frac{b}{t - \alpha} + Q(t), \tag{6}$$

где a, b — некоторые постоянные и функции $P(t)$, $Q(t)$ — аналитические в точке $t = \alpha$, и подставим под знаком интеграла в (5) вместо плотности $\omega(t)$ выражение, определяемое для нее из (3)

$$\omega(t) = \frac{1}{A(t) - B(t)}\left\{B(t)\varphi(t) - \int_L \omega(t_1) K(t_1, t)\,dt_1 + f(t)\right\}. \tag{7}$$

Тогда, используя теорему Коши и проделав несложные преобразования, получим после предельного перехода $z \to t_0$, где t_0 — некоторая точка контура L, уравнение Фредгольма для искомой функции

$$\omega(t_0) + \int_L \omega(t) G(t, t_0)\,dt = F(t_0). \tag{8}$$

Здесь ядро $G(t, t_0)$ и свободный член $F(t_0)$ — непрерывные на L функции, соответственно равные

$$G(t, t_0) = \frac{1}{A(t_0) + B(t_0)} \Bigg[K(t, \alpha) +$$

$$+ B(t_0) \left\{ \frac{1}{\pi i} \left(\frac{A(t) - B(t)}{B(t)} \right) \left(\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} \right) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{R(t_1;\ t,\ t_0)}{t_1 - t_0}\ dt_1 \right\} \Bigg],$$

$$F(t_0) = \frac{1}{A(t_0) + B(t_0)} \left[f(\alpha) + A(t_0) \frac{f(t_0) - f(\alpha)}{A(t_0) - B(t_0)} + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{M(t,\ t_0)}{t - t_0} dt \right], \quad (9)$$

$$R(t_1;\ t, t_0) = \frac{K(t, t_1)}{B(t_1)} \{ Q(t_1) - Q(t_0) \} -$$

$$- \frac{K(t, t_1) - K(t, \alpha)}{A(t_1) - B(t_1)} - K(t,\ \alpha) \{ P(t_1) - P(t_0) \},$$

$$M(t,\ t_0) = - \frac{f(t) - f(\alpha)}{A(t) - B(t)} - f(\alpha) \{ P(t) - P(t_0) \} + \frac{f(t)}{B(t)} \{ Q(t) - Q(t_0) \}.$$

На основании упомянутых выше свойств заданных функций и неизвестной $\varphi(t)$ интегрирование по контуру L' с некоторого места в промежуточных опущенных здесь выкладках снова заменено интегрированием по L.

§ 2. Значительный интерес представляет вопрос об эквивалентности уравнения Фредгольма (8) с исходным сингулярным уравнением (1).

При выводе уравнения Фредгольма было существенно использовано то обстоятельство, что функция $\varphi(t)$, определяемая по формуле (3) через искомое решение $\omega(t)$, аналитически продолжима в область S. Однако непосредственно не ясно, обладает ли, в свою очередь, любое решение $\omega(t)$ уравнения (8) этим свойством. Можно показать, что оно не всегда имеет место. В том же случае, когда указанное свойство присуще уравнению (8), последнее эквивалентно уравнению (1).

В самом деле, уравнение (8), как ясно из процесса его вывода, может быть представлено в форме

$$\{ A(t_0) + B(t_0) \} \varphi(t_0) - B(t_0) \lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt =$$

$$= - \{ A(t_0) - B(t_0) \} \chi(t_0), \quad (10)$$

$$\chi(z) = \frac{b}{\pi i (z - \alpha)} \int_{L'} \frac{\varphi(z)}{t - z} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{Q(t) \varphi(t)}{t - z} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{1}{\{ A(t) - B(t) \}} \left[f(t) - \int_L \omega(t_1) K(t_1,\ t)\, dt_1 \right] \frac{dt}{t - z} \quad (11)$$

для точек z, лежащих в области S.

Отсюда, полагая

$$\left[\ln \frac{A + B}{A - B} \right]_{L'} = 2\pi i \varkappa, \quad (12)$$

где левая часть обозначает приращение выражения, содержащегося в квадратных скобках, при обходе L' в положительном направлении, а $\varkappa$ — некоторое целое число или нуль, легко убедимся, что при отрицательном или нулевом значении $\varkappa$ функция $\varphi(t)$ продолжима в область S; в этом случае из (10) сразу вытекает уравнение (1). Если же $\varkappa$ положительно, то функция $\varphi(t)$, вообще говоря, не продолжима в область S * и, следовательно, уравнение (8) не эквивалентно (1).

Уравнение (8) было получено в предположении, что функция $B(t)$ нигде на L не равна нулю. Однако рассуждения сохраняют силу также в том случае, когда $B(t)$ обращается в нуль в некоторых точках контура L, но так, что уравнение (8) остается фредгольмовым. Если же при этом уравнение (8) не остается фредгольмовым, то, несколько видоизменяя рассуждения, можно все же преобразовать (1) в уравнение Фредгольма.

Примечание. Остановимся кратко на втором варианте. В этом случае перепишем уравнение (1) в виде

$$\{A(t_0)+B(t_0)\}\,\omega(t_0)+B(t_0)\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt+$$
$$+\int_L\omega(t)K(t,\,t_0)\,dt=f(t_0), \tag{13}$$

где предельное значение интеграла типа Коши берется уже извне контура L.

Введем теперь функцию $\varphi(t)$, регулярную вне L и обращающуюся в нуль на бесконечности, по формуле

$$\varphi(t)=\frac{1}{B(t)}\left[\{A(t)+B(t)\}\,\omega(t)+\int_L\omega(t_1)K(t_1,\,t)\,dt_1-f(t)\right]. \tag{14}$$

Тогда вместо (5) будем иметь

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{15}$$

для точек z, лежащих вне нового контура L''; последний содержит внутри себя точку $t=\alpha$ и лишь в ее окрестности отличается весьма незначительно от L. Поступая далее совершенно аналогично изложенному, придем к уравнению Фредгольма для функции $\omega(t)$. Оно либо эквивалентно, либо не эквивалентно уравнению (1), в зависимости от того, принимает ли целое число $\varkappa$, определяемое из формулы

$$\left[\ln\frac{A+B}{A-B}\right]_{L''}=2\pi i\varkappa, \tag{16}$$

либо отрицательное (или равное нулю), либо положительное значение.

В заключение отметим, что таким же образом (при аналогичных условиях) система сингулярных уравнений вида (1) может быть преобразована в уравнение Фредгольма.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
30 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [2] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. математ. ин-та, **12** (1943). [3] Д. И. Шерман, Прикладная математика и механика (1945). [4] Ф. Д. Гахов Матем. сб., нов. сер., **2** (44), № 4 (1937).

* К этим результатам мы придем, следуя Ф. Д. Гахову ([4]).