Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. РОХЛИН

УНИТАРНЫЕ КОЛЬЦА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1947)

1. Настоящая заметка, в которой я пользуюсь определениями и результатами моих заметок ([1], [2]), посвящена аксиоматическому описанию операции естественного умножения в унитарном пространстве классов тождественных mod 0 измеримых комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на некотором пространстве Лебега. Так как модуль произведения двух таких функций может иметь неинтегрируемый квадрат, то эта операция определена лишь частично. Теория пространства Лебега оказывается эквивалентной теории возникающего таким образом своеобразного кольца.

В отличие от ([2]), в настоящей заметке рассматриваются не только автоморфизмы, но и *эндоморфизмы* пространств Лебега, т. е. их гомоморфизмы на себя. Все определения и результаты, изложенные в ([2]) для автоморфизмов, после соответствующей модификации остаются в силе и для эндоморфизмов. С другой стороны, все, сказанное в настоящей заметке об отдельных автоморфизмах и эндоморфизмах, само собой переносится на континуальные группы автоморфизмов (потоки) и полугруппы эндоморфизмов.

Почти все, изложенное в n° 5, в несколько иной форме имеется у J. v. Neumann'a([3]). Построение транзитивного автоморфизма с заданным чисто точечным спектром, данное в n° 9, имеет с точки зрения абстрактной теории меры то преимущество перед построениями, данными в ([3]) и ([4]), что не пользуется понятиями, чуждыми этой теории. Здесь теория унитарных колец в известном смысле заменяет теорию характеров, с которой она имеет и другие точки соприкосновения.

Если в n° 2 считать пространство $\mathfrak{H}$ и числа α и β вещественными и положить $\bar{f}=f$, то получится аксиоматика вещественного аналога унитарного кольца, теория которого может быть построена по аналогии с теорией унитарного кольца или, если угодно, сведена к последней.

2. *Унитарное кольцо* есть сепарабельное унитарное (т. е. комплексное гильбертово) пространство $\mathfrak{H}$, для некоторых пар элементов которого определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:

I. Если определено произведение fg, то определено и произведение gf, и $gf=fg$.

II. Если определены fg, $(fg)h$ и gh, то определено и $f(gh)$, и $f(gh)=(fg)h$.

III. Если определены fh и gh, то, каковы бы ни были комплексные числа α и β, определено и $(\alpha f+\beta g)h$, и $(\alpha f+\beta g)h=\alpha(fh)+\beta(gh)$.

IV. Существует такой элемент $e \in \mathfrak{H}$ с нормой, равной единице ($\|e\|=1$), что при любом $f \in \mathfrak{H}$ произведение ef определено и равно f.

V. Если последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сильно сходится к f ($f_n \Rightarrow f$) и произведения $f_1 g, f_2 g, \ldots$ все определены и образуют последовательность, сильно сходящуюся к некоторому элементу h ($f_n g \Rightarrow h$), то и fg определено, и $fg=h$.

VI. Многообразие $\mathfrak{M}$ тех элементов $f \in \mathfrak{H}$, для которых fg определено при любом $g \in \mathfrak{H}$, плотно в $\mathfrak{H}$; более того, если fg определено, то существует такая последовательность элементов $f_n \in \mathfrak{M}$, что $f_n \Rightarrow f$, $f_n g \Rightarrow fg$.

VII. Для всякого элемента $f \in \mathfrak{H}$ существует такой элемент $\bar{f} \in \mathfrak{H}$, что при любых $g, h \in \mathfrak{M}$ $(fg, h)=(g, \bar{f}h)$.

Идеал унитарного кольца $\mathfrak{H}$ есть подпространство унитарного пространства $\mathfrak{H}$, содержащее вместе с каждым элементом f все элементы вида fg, $g \in \mathfrak{H}$. *Подкольцо* унитарного кольца $\mathfrak{H}$ есть такое его подмножество, которое само является унитарным кольцом по отношению к операциям, определенным в $\mathfrak{H}$. Отображение U унитарного кольца $\mathfrak{H}$ в унитарное кольцо $\mathfrak{H}'$ есть *изоморфизм*, если для любых двух элементов $f, g \in \mathfrak{H}$ и любых двух комплексных чисел α, β

$$U(\alpha f+\beta g)=\alpha Uf+\beta Ug, \quad (Uf, Ug)=(f, g), \quad U(fg)=UfUg,$$

причем $UfUg$ определено тогда и только тогда, когда определено fg. Всякий изоморфизм $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ есть изоморфизм кольца $\mathfrak{H}$ на некоторое подкольцо кольца $\mathfrak{H}'$. Далее, унитарные кольца $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ *изоморфны*, если они могут быть изоморфно отображены друг на друга; преобразование U кольца $\mathfrak{H}$ изоморфно преобразованию U' кольца $\mathfrak{H}'$, если существует такой изоморфизм V $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, что $U'=VUV^{-1}$, и т. д. *Автоморфизм* унитарного кольца $\mathfrak{H}$ есть изоморфизм $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$.

3. Примером унитарного кольца может служить кольцо $\mathfrak{H}(M)$ классов тождественных mod 0 измеримых комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на некотором пространстве Лебега M. В этом кольце все операции (линейные операция, операция скалярного умножения и операция умножения) соответствуют обычным операциям над функциями. Произведение двух классов определено в том и только в том случае, если модуль произведения соответствующих функций имеет интегрируемый квадрат; в частности, многообразие $\mathfrak{M}$ состоит из классов ограниченных mod 0 функций. Единица e есть класс функций, всюду mod 0 равных единице. Наконец, $\bar{f}$ есть класс функций, комплексно сопряженных с функциями класса f.

Всякое унитарное кольцо изоморфно некоторому кольцу $\mathfrak{H}(M)$.

4. Если A есть измеримое множество в M, то совокупность $\mathfrak{H}(A)$ классов функций, обращающихся в нуль всюду mod 0 вне A, есть идеал кольца $\mathfrak{H}(M)$, и идеалами $\mathfrak{H}(A)$ исчерпываются все идеалы этого кольца. Формула $A \to \mathfrak{H}(A)$ определяет изоморфное отображение структуры классов тождественных mod 0 измеримых подмножеств пространства M на структуру идеалов кольца $\mathfrak{H}(M)$; в частности, точки положительной меры находятся во взаимно-однозначном соответствии с минимальными идеалами.

Если ζ есть разбиение пространства M, то совокупность $\mathfrak{R}(\zeta)$ классов функций, постоянных mod 0 на элементах разбиения ζ, есть подкольцо кольца $\mathfrak{H}(M)$, и подкольцами $\mathfrak{R}(\zeta)$ исчерпываются все подкольца последнего. При этом можно ограничиться только измеримыми разбиениями, ибо если ζ' есть измеримая оболочка разбиения ζ, то $\mathfrak{R}(\zeta)=\mathfrak{R}(\zeta')$. Формула $\zeta \to \mathfrak{R}(\zeta)$ определяет изоморфное отображение структуры классов тождественных mod 0 измеримых разбиений пространства M на структуру подколец кольца $\mathfrak{H}(M)$. Кольцо $\mathfrak{R}(\zeta)$

естественно отождествить с кольцом $\mathfrak{H}(M/\zeta)$, построенным на фактор-пространстве M/ζ.

5. Каждому гомоморфизму T пространства Лебега M на пространство Лебега M' отвечает *сопряженный* изоморфизм U кольца $\mathfrak{H}(M')$ в кольцо $\mathfrak{H}(M)$, именно, отображение, которое получится, если отнести определенной на M' функции $f'(x')$ определенную на M функцию $f(x)=f'(Tx)$. Обратно, всякий изоморфизм U кольца $\mathfrak{H}(M')$ в кольцо $\mathfrak{H}(M)$ сопряжен с некоторым гомоморфизмом T пространства M на пространство M', который определяется изоморфизмом U mod 0 однозначно. При этом $U(\mathfrak{H}(M'))=\mathfrak{R}(\zeta_T)$, где ζ_T есть разбиение пространства M, отвечающее гомоморфизму T ((1), n° 8); в частности, $U(\mathfrak{H}(M'))=$ $=\mathfrak{H}(M)$ в том и только в том случае, если T есть изоморфизм mod 0, так что кольца $\mathfrak{H}(M)$ и $\mathfrak{H}(M')$ изоморфны в том и только в том случае, если пространства M и M' изоморфны mod 0. Далее, с эндоморфизмами пространства M сопряжены автоморфизмы кольца $\mathfrak{H}(M)$, а автоморфизмам пространства M отвечают автоморфизмы $\mathfrak{H}(M)$ на все $\mathfrak{H}(M)$. При этом два автоморфизма — автоморфизм U кольца $\mathfrak{H}(M)$ и автоморфизм U' кольца $\mathfrak{H}(M')$ — изоморфны в том и только в том случае, если соответствующие эндоморфизмы T и T' принадлежат к одному типу.

6. Разбиение ζ пространства Лебега M *инвариантно* относительно эндоморфизма T, если образ любого элемента разбиения ζ есть часть некоторого элемента разбиения ζ $(T\zeta \geqslant \zeta)$. Если при этом ζ измеримо, то можно говорить об эндоморфизме T_ζ, индуцированном эндоморфизмом T в фактор-пространстве M/ζ. Подкольцо $\mathfrak{R}$ унитарного кольца $\mathfrak{H}$ инвариантно относительно автоморфизма U этого кольца, если $U\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$. В этом случае U индуцирует в $\mathfrak{R}$ определенный автоморфизм $U_{\mathfrak{R}}$. Если $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(M)$ и автоморфизм U сопряжен с эндоморфизмом T, то из инвариантности разбиения ζ относительно T следует инвариантность подкольца $\mathfrak{R}(\zeta)$ относительно U, и $U_{\mathfrak{R}}$ можно рассматривать как автоморфизм, сопряженный с T_ζ. Обратно, если $\mathfrak{R}(\zeta)$ инвариантно относительно U, то ζ инвариантно mod 0 относительно T.

Неподвижным mod 0 разбиениям отвечают подкольца, состоящие из инвариантных элементов, и наоборот; в частности, каноническому разбиению отвечает подкольцо всех инвариантных элементов.

7. Теоремы $n^\circ n^\circ$ 3 и 5 показывают, что теория пространств Лебега эквивалентна теории унитарных колец, и открывают возможности для применения последней к решению тех или иных проблем первой. Прежде всего это относится к проблемам, связанным со спектральными инвариантами автоморфизмов унитарных колец, инвариантами, которые могут быть названы также спектральными инвариантами соответствующих эндоморфизмов пространств Лебега. Простые примеры таких применений даны в $n^\circ n^\circ$ 8 и 9. Наоборот, каждое предложение теории пространств Лебега приводит к некоторому предложению теории унитарных колец. Например, достаточно формулировать в терминах последней результаты, изложенные в (1), чтобы получить как полную классификацию самих унитарных колец, так и полную классификацию их изоморфизмов друг в друга (которая эквивалентна классификации всех возможных способов расположения одного унитарного кольца в другом).

8. Пусть U — автоморфизм кольца $\mathfrak{H}(M)$, сопряженный с эндоморфизмом T пространства M. Подпространство унитарного пространства $\mathfrak{H}(M)$, порожденное собственными элементами оператора U, есть инвариантное подкольцо, и если ζ — соответствующее инвариантное измеримое разбиение пространства M, то T_ζ есть автоморфизм с чисто точечным спектром, совпадающим с точечной частью спектра эндоморфизма T.

9. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная счетная мультипликативная группа комплексных чисел, по модулю равных единице. Если в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$ определенных на $\mathfrak{G}$ комплексных функций f, для которых $\sum_{\xi \in \mathfrak{G}} |f(\xi)|^2 < \infty$, ввести произведение $h = fg$, полагая $h(\zeta) = \sum_{\xi\eta=\zeta} f(\xi) g(\eta)$ при условии, что $\sum_{\zeta \in \mathfrak{G}} |h(\zeta)|^2 < \infty$, то $\mathfrak{H}$ превратится в унитарное кольцо, и преобразование $f' = Uf$, определенное формулой $f'(\xi) = \xi f(\xi)$ $(\xi \in \mathfrak{G})$, будет автоморфизмом $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}$. Соответствующий автоморфизм пространства Лебега является транзитивным и имеет чисто точечный спектр, совпадающий с $\mathfrak{G}$.

Поступило
27 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Рохлин, ДАН, **58**, № 1 (1947). [2] В. Рохлин, ДАН, 58. № 2 (1
[3] J. v. Neumann, Ann. of Math., **33**, 574 (1932). [4] P. R. Halmos and J. v. Neumann, Ann. of Math., (2), **43**, 587 (1942).