Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Н. НИКОЛЬСКИЙ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ ФРЕШЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 XI 1947)

1. В дальнейшем изложении через E всегда будем обозначать пространство типа F с базисом $\{u_n\}$ ([1]). Посредством $\|u\|$ обозначим норму элемента $u \in E$.

В силу свойств базиса любой элемент $u \in E$ единственным образом разлагается в ряд

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(u)\, u_i, \tag{1}$$

где $c_i(u)$, $i=0, 1, \ldots,$ — комплексные коэффициенты разложения u

Обозначив

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(u)\, u_i = s_n(u), \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i(u)\, u_i = R_n(u),$$

будем называть эти элементы n-й частной суммой, соответственно n-м остатком разложения $u \in E$.

Условимся называть полиномами линейные комбинации конечного числа элементов системы $\{u_n\}$ и полиномиальными дополнениями элементы $\sigma \in E$ такие, что

$$\sigma = \sum_{i=k}^{\infty} \gamma_i u_i, \qquad k > 0.$$

Определение 1. Полином

$$\pi_n(u) = c_0 u_0 + \ldots + c_n u_n$$

назовем полиномом порядка n, наименее уклоняющимся от u, если

$$\| u - \pi_n(u) \| = \inf_{x_0, \ldots, x_n} \| u - x_0 u_0 - \ldots - x_n u_n \|.$$

Полином

$$T_n = u_n - \pi_{n-1}(u_n)$$

будем называть полиномом порядка n, наименее уклоняющимся от нуля.

2*

Определение 2. Полиномиальное дополнение

$$\sigma_n(u)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\gamma_i u_i$$

назовем наименее уклоняющимся от u порядка n, если

$$\|u-\sigma_n(u)\|=\inf_{x_{n+1},\ldots}\left\|u-\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i u_i\right\|.$$

Определение 3. Мы скажем, что в E можно ввести метрику, эквивалентную исходной, если для элементов $u\in E$ можно определить новую норму $|u|$, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{n\to\infty}|v_n|=0$ в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|=0,\qquad v_n\in E.$$

2. Теорема 1. *В E можно ввести метрику, эквивалентную исходной и обладающую свойствами:*

a) *для любого $u\in E$ и $n=0, 1, \ldots$ существует, и притом единственный, полином порядка n, наименее уклоняющийся от u;*

b) *этот полином совпадает с n-й частной суммой разложения u:*

$$\pi_n(u)=s_n(u),\qquad n=0,\ 1,\ldots$$

Норму элемента в этой метрике обозначим через $((u (($. Метрику, обладающую свойствами a) и b), назовем T-метрикой.

Следствие 1. В T-метрике теоремы 1 $T_n=u_n$, $n=0,\ 1,\ldots$ (см. определение 1).

Очевидно, что в T-метрике

$$\left(\left(\sum_{i=k}^{n}a_i u_i\right(\left(<\left(\left(\sum_{i=k-1}^{n}a_i u_i\right(\left($$

для всех $0<k\leqslant n$, любого натурального n и любой системы чисел $(a_{k-1},\ldots,a_n)$, $a_{k-1}\neq 0$.

Теорема 2. *В E можно ввести метрику, эквивалентную исходной и обладающую свойствами:*

a') *для любого $u\in E$ и $n=0, 1, \ldots$ существует, и притом единственное, полиномиальное дополнение порядка n, наименее уклоняющееся от u;*

b') *это полиномиальное дополнение совпадает с n-м остатком разложения u:*

$$\sigma_n(u)=R_n(u),\qquad n=0,\ 1,\ldots$$

Будем называть метрику со свойствами a') и b') K-метрикой, и соответствующую норму элемента $u\in E$ обозначим $))u))$.

Очевидно, что в K-метрике

$$\Big)\Big)\sum_{i=0}^{n}a_i u_i\Big)\Big)<\Big)\Big)\sum_{i=0}^{n+1}a_i u_i\Big)\Big),\qquad n=0,\ 1,\ldots,$$

если $a_{n+1}\neq 0$.

Назовем канонической метрику, которая одновременно является T-метрикой и K-метрикой. Соответствующую норму элемента u обозначим через $((u))$.

Очевидно,

$$\Big(\Big(\sum_{i=k}^{n} a_i u_i\Big)\Big) < \Big(\Big(\sum_{i=k-1}^{n+1} a_i u_i\Big)\Big),$$

если хотя бы одно из чисел a_{k-1}, $a_{n+1} \neq 0$.

Теорема 3. *В E можно ввести каноническую метрику, эквивалентную исходной.*

Назовем каноническую метрику совершенной если:

($*$) $((tu))$ есть монотонно возрастающая функция действительного переменного t.

Теорема 4. *В E можно ввести совершенную метрику, эквивалентную исходной.*

3. Пусть G — пространство типа F и $\{u_n\}$ — система его элементов.

Мы скажем, что метрика пространства G есть слабая T-метрика относительно системы $\{u_n\}$ и обозначим норму элемента $u \in G$ через $(u($, если для любого натурального n и любого $m < n$ существует полином порядка m, наименее уклоняющийся от $p_n = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i$, который совпадает с $\sum_{i=0}^{m} c_i u_i$:

$$\pi_m\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i u_i\Big) = \sum_{i=0}^{m} c_i u_i,$$

какова бы ни была система чисел $(c_0, \ldots, c_n)$.

В этих терминах теорема 1 допускает обращение:

Теорема 5. *Для того чтобы система $\{u_n\}$ была базисом пространства G типа F, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *система $\{u_n\}$ была полна* (²);

2) *в G можно было ввести слабую T-метрику относительно системы $\{u_n\}$, эквивалентную исходной.*

4. Укажем кратко метод доказательства приведенных теорем.

Чтобы доказать теорему 1, введем обозначение:

$$((u((= \max_k \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{k} \| c_i(u) u_i \|}{k+1} + \Big\| \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i(u) u_i \Big\| \right\}.$$

Нетрудно показать, что $((u(($ и есть новая норма, требуемая теоремой 1. Основа доказательства заключается в проверке того, что из $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$, $v_n \in E$ следует $\lim_{n\to\infty} ((v_n((= 0$. Это получается с помощью леммы.

Лемма. *Если* $v_n \in E$, $n = 0, 1, \ldots,$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=0}^{\infty} c_i(v_n) u_i \Big\| = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_k \Big\| \sum_{i=0}^{k} c_i(v_n)\, u_i \Big\| \Big) = 0.$$

Она содержится в [1] для пространств типа B. Для случая пространства типа F см., например, [3].

Доказывая теорему 2, обозначаем

$$))u)) = \sup_k \left\{ \left\| \sum_{i=0}^{k} c_i(u) \right\| + \max_n \frac{\sum\limits_{k+1}^{n} \| c_i(u)\, u_i \|}{n-k} \right\}$$

и пользуемся леммой.

Теорему 3 получим, обозначая

$$((u)) = \sup_k \left\{ \left(\left(\sum_{i=0}^{k} c_i(u)\, u_i ((+)) \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i(u)\, u_i \right) \right) \right\}.$$

Наконец, теорему 4 получим, введя в E сначала метрику, удовлетворяющую условию (*) [4], и заметив, что при дальнейших преобразованиях свойство, указанное в условии (*), сохраняется.

Обращаясь к теореме 5, покажем сначала, что $\{u_n\}$, если условия теоремы выполнены, является усиленно-линейно независимой системой [2]. Это следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\pi_i(p_n)(= 0$, если $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n(= 0$, $i=0, 1, \ldots$, и из неравенства

$$(c_i^{(n)} u_i (= \left(\sum_{k=0}^{i} c_k^{(n)} u_k - \sum_{k=0}^{i-1} c_k^{(n)} u_k \right(\leqslant \pi_i(p_n)(+ (\pi_{i-1}(p_n)(;$$

здесь $p_n = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i^{(n)} u_i$.

Далее, нетрудно показать, что

$$s_n(u) = \sum_{i=0}^{n} c_i(u)\, u_i; \qquad n=0, 1, \ldots$$

($s_n(u)$ есть частная сумма ряда, ассоциированного с u в силу усиленно-линейной независимости системы $\{u_n\}$) являются полиномами, наименее уклоняющимися от u.

В силу полноты $\{u_n\}$ отсюда следует сходимость ряда, ассоциированного с u, к u. Единственность разложения вытекает из усиленно-линейной независимости $\{u_n\}$.

Необходимость условий теоремы 5 следует из теоремы 1.

Калининский государственный
педагогический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
21 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [2] А. И. Маркушевич, Матем. сб., **17**, № 2 (1945). [3] А. И. Маркушевич, Некоторые вопросы теории приближения и разложения функций в ряды, докторская диссертация, 1944. [4] M. Eidelheit u. S. Mazur, Studia Math., **7** (1938).