Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. ЛЕВИН

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КАРЛСОНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1947)

Пусть $a_n \geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$, но не все a_n равны нулю. Ф. Карлсон ([1]) установил следующее неравенство:

$$\sum a_n < \sqrt{\pi}\left(\sum a_n^2\right)^{1/4}\left(\sum n^2 a_n^2\right)^{1/4}, \tag{1}$$

если $\sum n^2 a_n^2 < \infty$, причем $\sqrt{\pi}$ — точная константа. Г. Харди ([2]) дал два простых доказательства этого неравенства.

Неравенство Карлсона (1) было обобщено Р. Габриэлем ([3]), который показал, что

$$\sum a_n < G(p, \lambda)\left(\sum n^{p-1-\lambda} a_n^p\right)^{\frac{1}{2p}}\left(\sum n^{p-1+\lambda} a_n^p\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{2}$$

если $\sum n^{p-1+\lambda} a_n^p < \infty$, где $p > 1$ и $\lambda > 0$, а

$$G(p, \lambda) = 2^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2p-2}\right)}{2\lambda\Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Константа $G(p, \lambda)$ — точная. Неравенство (1) является частным случаем (2) при $p=2$, $\lambda=1$.

Неравенство (2) имеет интегральный аналог. Пусть $f(x) \geqslant 0$, $0 < x < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \leqslant G(p, \lambda)\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\int_0^\infty x^{p-1+\lambda} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{3}$$

В отличие от неравенства (2) для рядов, в интегральном неравенстве (3) знак равенства достигается для некоторых $f(x) \neq 0$.

Можно рассматривать более общую постановку вопроса, а именно: при каких $p > 0$, $q > 0$, $s > 0$, $t > 0$ и действительных λ и μ существует такая константа $C = C(p, q, s, t, \lambda, \mu)$, что

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \leqslant C\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda} f^p(x)\,dx\right\}^s\left\{\int_0^\infty x^{q-1+\mu} f^q(x)\,dx\right\}^t$$

для всех $f(x) \geqslant 0$? Из соображений однородности относительно $f(x)$ сразу следует, что должно выполняться условие $ps + qt = 1$. Далее, полагая $x = \rho\xi$, $\rho > 0$, и заменяя $f(\rho\xi)$ на $f(\xi)$, заключаем, что должно также выполняться условие $(p-\lambda)s + (q+\mu)t = 1$. Таким образом, если p, q, λ и μ заданы, то s и t должны иметь определенные значения:

$$s=\frac{\mu}{p\mu+q\lambda}, \quad t=\frac{\lambda}{p\mu+q\lambda}. \tag{4}$$

У. Катоном [4] и Р. Беллманом [5] было доказано, что если $p>1$, $q>1$, $\lambda>0$, $\mu>0$, то действительно имеет место неравенство

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \leqslant C\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{\mu}{p\mu+q\lambda}} \left\{\int_0^\infty x^{q-1+\mu} f^q(x)\,dx\right\}^{\frac{\lambda}{p\mu+q\lambda}}. \tag{5}$$

Однако наилучшее значение константы $C=C(p, q, \lambda, \mu)$ было известно только в приведенном выше частном случае $p=q>1$, $\lambda=\mu>0$ (неравенство (3)).

Наша цель состоит в определении наилучшего значения $C(p, q, \lambda, \mu)$ в общем случае. Мы докажем следующий результат:

Неравенство (5) *имеет место при*

$$C=\left(\frac{1}{ps}\right)^s\left(\frac{1}{qt}\right)^t\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{s}{1-s-t}\right)\Gamma\left(\frac{t}{1-s-t}\right)}{(\lambda+\mu)\,\Gamma\left(\frac{s+t}{1-s-t}\right)}\right\}^{1-s-t}, \tag{6}$$

где s и t определены соотношениями (4), *причем для любых $p>1$, $q>1$, $\lambda>0$, $\mu>0$ существуют функции $f(x)\not\equiv 0$, для которых в неравенстве* (5) *с константой* (6) *имеет место знак равенства.*

Пусть $p'=\frac{p}{p-1}$, $q'=\frac{q}{q-1}$ $\left(p'>1, \quad q'>1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\right.$ $\left.\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$. Рассмотрим функцию

$$z=z(k)=k^{-\frac{p'q}{p'q\lambda+pq'\mu}}(1-k)^{\frac{pq'}{p'q\lambda+pq'\mu}}=\left\{\frac{(1-k)^{p-1}}{k^{q-1}}\right\}^{\frac{1}{\delta}}, \tag{7}$$

где $\delta=p\mu+q\lambda-\mu-\lambda>0$. В интервале $0<k<1$ функция $z(k)$ непрерывна и строго монотонна. Следовательно, существует однозначная непрерывная обратная функция $k=k(z)$, $0<z<\infty$. Запишем тождество

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty k(yx)\,x^{-\frac{p-1-\lambda}{p}}x^{\frac{p-1-\lambda}{p}}f(x)\,dx+$$
$$+\int_0^\infty [1-k(yx)]\,x^{-\frac{q-1+\mu}{q}}x^{\frac{q-1+\mu}{q}}f(x)\,dx, \tag{8}$$

где $y>0$ произвольно. Применяя к интегралам в правой части этого тождества неравенство Гельдера и полагая

$$P=\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad Q=\left\{\int_0^\infty x^{q-1+\mu}f^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}},$$

найдем, что

$$\int_0^\infty k(yx)\, x^{-\frac{p-1-\lambda}{p}}\, x^{\frac{p-1-\lambda}{p}} f(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^\infty k^{p'}(yx)\, x^{-\frac{p-1-\lambda}{p-1}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p'}} P = y^{-\frac{\lambda}{p}} I_1 P, \tag{9}$$

$$\int_0^\infty [1-k(yx)]\, x^{-\frac{q-1+\mu}{q}}\, x^{\frac{q-1+\mu}{q}} f(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^\infty [1-k(yx)]^{q'}\, x^{-\frac{q-1+\mu}{q-1}}\, dx \right\}^{\frac{1}{q'}} Q = y^{\frac{\mu}{q}} I_2 Q, \tag{10}$$

где

$$I_1 = \left\{ \int_0^\infty k^{p'}(z)\, z^{-1+\frac{\lambda}{p-1}}\, dz \right\}^{\frac{1}{p'}}, \quad I_2 = \left\{ \int_0^\infty [1-k(z)]^{q'}\, z^{-1-\frac{\mu}{q-1}}\, dz \right\}^{\frac{1}{q'}}.$$

Таким образом, из тождества (8) при

$$y = \left(\frac{qt}{ps} \frac{I_1 P}{I_2 Q} \right)^{\frac{pq}{p\mu + q\lambda}}$$

следует, что

$$\int_0^\infty f(x)\, dx \leqslant y^{-\frac{\lambda}{p}} I_1 P + y^{\frac{\mu}{q}} I_2 Q = \left(\frac{1}{ps}\right)^{ps} \left(\frac{1}{qt}\right)^{qt} I_1^{ps} I_2^{qt} P^{ps} Q^{qt}. \tag{11}$$

Интегралы I_1 и I_2 выражаются через гамма-функцию. Переходя к переменной интегрирования k, по (7) и (4) найдем, что

$$I_1^{p'} = \frac{p'q}{p'p\lambda + pq'\mu} \int_0^1 k^{\frac{s}{1-s-t}} (1-k)^{\frac{t}{1-s-t}}\, dk +$$

$$+ \frac{pq'}{p'q\lambda + pq'\mu} \int_0^1 k^{\frac{s}{1-s-t}+1} (1-k)^{\frac{t}{1-s-t}-1}\, dk =$$

$$= \frac{ps}{\lambda+\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{1-s-t}\right) \Gamma\left(\frac{t}{1-s-t}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+t}{1-s-t}\right)},$$

и, аналогично,

$$I_2^{q'} = \frac{qt}{\lambda+\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{1-s-t}\right) \Gamma\left(\frac{t}{1-s-t}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+t}{1-s-t}\right)}.$$

Подставляя эти выражения для I_1 и I_2 в неравенство (11), получим неравенство (5) с константой (6).

Покажем теперь, что константа (6) является точной. Для этого достаточно показать, что в неравенствах (9) и (10) может одновременно иметь место знак равенства. Неравенство (9) превращается в равенство, если

$$k^{p'}(yx)\,x^{-\frac{p-1-\lambda}{p-1}} \equiv Ax^{p-1-\lambda} f^p(x), \tag{12}$$

а неравенство (10) превращается в равенство, если

$$[1-k(yx)]^{q'}\,x^{-\frac{q-1+\mu}{q-1}} \equiv Bx^{q-1+\mu} f^q(x), \tag{13}$$

где A и B не зависят от x. Соотношения же (12) и (13) совместны в силу определения функции $k(z)$ (соотношение (7)), если положить $\frac{B}{A}=y^{\frac{p'\lambda+q'\mu}{pq}}$. Знак равенства имеет место в (5) с константой (6) при

$$f(x)=y^{\frac{\lambda}{p-1}}\,k^{\frac{1}{p-1}}(yx)\,x^{-\frac{p-1-\lambda}{p-1}}=$$
$$=y^{-\frac{\mu}{q-1}}[1-k(yx)]^{\frac{1}{q-1}}\,x^{-\frac{q-1+\mu}{q-1}},$$

где $y>0$ произвольно.

Функция $k(z)$ выражается в явном виде в случаях $q=p$, $q=2p-1$ и $q=\frac{1}{2}(p+1)$.

Отметим следующий предельный случай неравенства (5). Рассмотрим такие $f(x)\geqslant 0$, что $x^{-\lambda}f(x)\in L(0,\infty)$, $x^{\mu}f(x)\in L(0,\infty)$, и положим при $\xi>0$ $f_\xi(x)=f(x)$, если $f(x)\leqslant\xi$; $f_\xi(x)=\xi$, если $f(x)>\xi$, и $f_\xi(x)=0$ для $x>\xi$. В неравенстве

$$\int_0^\infty f_\xi(x)\,dx\leqslant C\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda} f_\xi^p(x)\,dx\right\}^{\frac{\mu}{p\mu+q\lambda}}\left\{\int_0^\infty x^{q-1+\mu} f_\xi^q(x)\,dx\right\}^{\frac{\lambda}{p\mu+q\lambda}},$$

где C имеет значение (6), мы можем сделать предельный переход $p\to 1+0$, $q\to 1+0$, так как правая часть этого неравенства является непрерывной функцией от $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$. При этом $s+t\to 1-0$ ($s>0$, $t>0$) и константа C стремится к единице. Устремляя затем ξ к бесконечности, мы находим неравенство

$$\int_0^\infty f(x)\,dx<\left\{\int_0^\infty x^{-\lambda} f(x)\,dx\right\}^{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\left\{\int_0^\infty x^{\mu} f(x)\,dx\right\}^{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}},$$

если $f(x)\neq 0$, в котором знак равенства исключается, так как экстремальная функция перестает существовать. Полученное неравенство является, конечно, точным.

Аналогичное рассуждение показывает, что неравенство (5) с константой (6) остается в силе и для таких $p>0$ и $q>0$, для которых $\delta=p\mu+q\lambda-\mu-\lambda>0$ (т. е. $s+t<1$), однако при $p<1$ или $q<1$ константа (6) уже не является наилучшей.

Соответствующие неравенства для рядов могут быть выведены либо из полученных интегральных неравенств, либо непосредственно применением того же метода.

Поступило
27 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Carlson, Arkiv för Mat., **25**, 1 (1935). [2] G. H. Hardy, J. London. Math. Soc., **11**, 167 (1936). [3] R. M. Gabriel, ibid., **12**, 130 (1937). [4] W. B. Caton, Duke Math. J., **6**, 442 (1940). [5] R. Bellman, ibid., **10**, 547 (1943).