Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. БОКШТЕЙН

О ТЕОРЕМЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ АЛЕКСАНДЕРА—КОЛМОГОРОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1947)

Цель настоящей заметки — дать обобщение теоремы двойственности Александера — Колмогорова, переделав для этого должным образом доказательство П. С. Александрова ([1]), на тот случай, когда объемлющее пространство не предполагается нормальным.

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями статьи П. С. Александрова ([3]) *. Функции f_α^r будут называться r-цепями; если ε^β вписано в ε^α, то мы будем первое покрытие называть подразделением второго.

Пусть R — локально-бикомпактное хаусдорфово пространство, а A — его замкнутое подпространство.

Определение 1. Покрытие ε_R^α пространства R называется правильным относительно A, если для каждого $e_i^\alpha \in \varepsilon_R^\alpha$, замыкание $\overline{e_i^\alpha}$ которого бикомпактно, из $e_i^\alpha \cap A = 0$ следует $\overline{e_i^\alpha} \cap A = 0$.

Основная лемма. *Во всякое покрытие пространства R можно вписать покрытие, правильное относительно A.*

В самом деле, в силу нормальности бикомпактных хаусдорфовых пространств для бикомпактного подпространства $\overline{B}$ пространства R, полученного объединением всех бикомпактных $\overline{e_i^\alpha}$, правильное подразделение (относительно $A \cap B$) покрытия B, состоящего из всех непустых пересечений $e_i^\alpha \cap B$, может быть построено обычным образом (см. ([1]), [6: 22]); что же касается $R - B$, то нетрудно построить покрытие этого подпространства, вписанное в ε_R^α и с элементами, обладающими небикомпактными замыканиями.

---

* Так, ε^α суть открытые конечные мультипликативные покрытия, а f_α^r — функции $q+1$ элемента $e_{i_0}^\alpha \supseteq \ldots \supseteq e_{i_r}^\alpha$ покрытия ε^α, обращающиеся в нуль, если для некоторого k $e_{i_k}^\alpha = e_{i_{k+1}}^\alpha$ или если замыкание $\overline{e_{i_q}^\alpha}$ множества $e_{i_q}^\alpha$ небикомпактно; $S_\alpha^\beta e_j^\beta$ обозначает наименьший элемент ε^α, содержащий $e_j^\beta \in \varepsilon^\beta$ (ε^β предполагается вписанным в ε^α), а σ_β^α определено соотношением $[\sigma_\beta^\alpha f_\alpha^r](e_{j_0}^\beta, \ldots, e_{j_r}^\beta) = f_\alpha^r(S_\beta^\alpha e_{j_0}^\beta, \ldots, S_\alpha^\beta e_{j_r}^\beta)$. При помощи верхнего граничного оператора ∇ вводятся затем обычным путем ∇-циклы и ∇-границы; совокупность этих ∇-циклов разбиваем на непересекающиеся ∇-классы, считая два ∇-цикла f_α^r и $f_\beta'^r$ принадлежащими к одному ∇-классу в том и только в том случае, когда существует ε^γ, вписанное одновременно в ε^α и ε^β такое, что $\sigma_\gamma^\alpha f_\alpha^r$ и $\sigma_\gamma^\beta f_\beta'^r$ ∇-гомологичны. Группа всех r-мерных ∇-классов есть тогда r-мерная ∇-группа $\nabla^r(R, X) = \nabla^r(R)$ пространства R (X есть данная аддитивная группа значений f_α^r).

Определение II. Покрытие ε_R^β пространства R, элементы которого, встречающие A, дают в пересечении с A элементы данного покрытия ε_A^α пространства A, называются распространением ε_A^α на R, если каждый элемент покрытия ε_A^α является таким пересечением некоторого элемента ε_R^β с A и если, кроме того, удовлетворяется следующее условие: если пересечение некоторого элемента покрытия ε_R^β с A имеет бикомпактное замыкание, то и замыкание самого этого элемента бикомпактно.

Определение III. Покрытие ε_A^α пространства A называется нормальным, если никакой элемент ε_A^α с бикомпактным замыканием не может быть представлен как пересечение элементов ε_A^α с небикомпактными замыканиями.

Легко доказать следующие две леммы:

Лемма 1. *Каждое покрытие пространства A имеет нормальное подразделение.*

Лемма 2. *Для каждого нормального покрытия пространства A существует его распространение на R.*

Теорема двойственности Александера—Колмогорова. *Если для некоторого q q-мерная и $q+1$-мерная ∇-группы $\nabla^q(R)$ и $\nabla^{q+1}(R)$ локально-бикомпактного хаусдорфова пространства R тривиальны, то для всякого замкнутого подмножества $A \subset R$ группы $\nabla^q(A)$ и $\nabla^{q+1}(R-A)$ изоморфны.*

Набросок доказательства. Пусть u_A^q — произвольный элемент группы $\nabla^q(A)$, а $f_{\bar\alpha}^q$ — некоторый ∇-цикл какого-либо покрытия $\varepsilon_A^{\bar\alpha}$ пространства A из ∇-класса u_A^q. При помощи леммы 1 строим сперва нормальное подразделение $\varepsilon_A^\alpha = \{e_i^\alpha\}$ покрытия $\varepsilon_A^{\bar\alpha}$. Воспользовавшись затем леммой 2, находим распространение $\varepsilon_R^\beta = \{e_i^\beta\}$ покрытия ε_A^α на R.

Определяем теперь q-цепь f_β^q покрытия ε_R^β посредством формулы

$$f_\beta^q(e_{i_0}^\beta, \ldots, e_{i_q}^\beta) = \begin{cases} [\sigma_\alpha^{\bar\alpha} f_{\bar\alpha}^q](e_{i_0}^\beta \cap A, \ldots, e_{i_q}^\beta \cap A), & \text{если } e_{i_q}^\beta \cap A \neq 0, \\ 0, & \text{если } e_{i_q}^\beta \cap A = 0 \end{cases}$$

(при этом все время $e_{i_0}^\beta \supseteq \ldots \supseteq e_{i_q}^\beta$). Легко видеть, что f_β^q удовлетворяет всем требованиям понятия цепи.

С помощью нашей основной леммы строим теперь подразделение $\varepsilon_R^{\beta'} = \{e_i^{\beta'}\}$ покрытия ε_R^β, правильное относительно A. Пусть $\varepsilon_{R-A}^{\gamma'} = \{e_i^{\gamma'}\}$ есть покрытие пространства $R-A$, составленное из всех непустых пересечений $e_i^{\beta'} \cap (R-A)$ элементов $e_i^{\beta'} \in \varepsilon_R^{\beta'}$ с $R-A$.

Рассмотрим $q+1$-цепь $F_{\gamma'}^{q+1}$ покрытия $\varepsilon_{R-A}^{\gamma'}$, определенную соотношением

$$F_{\gamma'}^{q+1}(e_{i_0}^{\gamma'}, \ldots, e_{i_{q+1}}^{\gamma'}) = [\nabla(\sigma_{\beta'}^{\beta} f_\beta^q)](I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_0}^{\gamma'}, \ldots, I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}),$$

где $I_{\beta'}^{\gamma'} e_i^{\gamma'}$ обозначает наименьший элемент покрытия $\varepsilon_R^{\beta'}$ пространства R, содержащий $e_i^{\gamma'}$ (т. е. пересечение всех элементов $\varepsilon_R^{\beta'}$, содержащих $e_i^{\gamma'}$). $F_{\gamma'}^{q+1}$ действительно есть цепь, ибо она обращается в нуль, когда замыкание $e_{i_{q+1}}^{\gamma'}$ в $R-A$ небикомпактно: если $\overline{I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}} \cap A \neq 0$, то это в силу правильности $\varepsilon_R^{\beta'}$ непосредственно вытекает из $\nabla f_{\bar\alpha}^q = 0$ (ибо в этом случае $[I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_q}^{\gamma'}] \cap A \supseteq [I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}] \cap A \neq 0$), если же $I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}$ само небикомпактно, то это следует из обращения в нуль цепей

$(-1)^{\nu}\left[\sigma_{\beta'}^{\beta}, f_{\beta}^{q}\right]\left(I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_0}^{\gamma'}, \ldots, I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{\nu-1}}^{\gamma'}, I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{\nu+1}}^{\gamma'}, \ldots, I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}\right)$, дающих в сумме $F_{\gamma'}^{q+1}$. $F_{\gamma'}^{q+1}$ является, далее, ∇-циклом, ибо

$$\left[\nabla F_{\gamma'}^{q+1}\right]\left(e_{i_0}^{\gamma'}, \ldots, e_{i_{q+1}}^{\gamma'}\right)=\left[\nabla\left\{\nabla\left(\sigma_{\beta'}^{\beta}, f_{\beta}^{q}\right\}\right]\left(I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_0}^{\gamma'}, \ldots, I_{\beta'}^{\gamma'} e_{i_{q+1}}^{\gamma'}\right)=0.$$

Можно показать, что ∇-класс u_{R-A}^{q+1} пространства $R-A$, содержащий ∇-цикл $F_{\gamma'}^{q+1}$, зависит только от данного ∇-класса u_A^q пространства A и не изменяется при замене f_{α}^{q} каким-либо другим ∇-циклом из u_A^q, как бы ни менялся при этом выбор покрытый ε_A^{α}, ε_R^{β} и $\varepsilon_R^{\beta'}$. Поэтому возникает отображение $\mathfrak{h}$ группы $\nabla^q(A)$ в $\nabla^{q+1}(R-A)$, которое тотчас же оказывается гомоморфным,

Обычное рассуждение показывает теперь, что при выполнении условий теоремы $\mathfrak{h}$ есть изоморфизм $\nabla^q(A)$ на $\nabla^{q+1}(R-A)$. Теорема двойственности Александера — Колмогорова доказана таким образом без требования нормальности R, т. е. в тех же предпосылках, что и в первоначальном доказательстве А. Н. Колмогорова (3), основанном на другом определении ∇-групп.

Поступило
27 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Уч. зап. МГУ, **45**, 3 (1940); Trans. Amer. Math. Soc., **49**, 41, § 8 (1941). [2] П. С. Александров, ДАН, **26**, № 7 (1940). [3] A. Kolmogoroff, C. R., **202**, 1114, 1327, 1558, 1641 (1936).