Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Я. АРЕШКИН

СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ T_1- И T_2-ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1947)

В настоящей работе дается структурная характеристика локально бикомпактных T_1- и T_2-пространств. Теоремы 1 и 2 заключают в себе аксиоматическое описание алгебраических структур этих классов пространств. Получающиеся из них в качестве частных случаев теоремы 3 и 4, формулирующие аналогичные результаты для бикомпактных T_1- и T_2-пространств, по существу принадлежат Wallman'у (1). Далее, теорема 5 показывает, что гомеоморфность пространств этих классов сводится к существованию у них изоморфных структур. Таким образом, эти топологические пространства с точностью до гомеоморфизма однозначно определяются их структурами.

1. Пусть R есть локально бикомпактное T_1-пространство. Условимся обозначать через $\{F\}$ его замкнутый базис, образующий дистрибутивную структуру относительно теоретико-множественных операций объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ двух множеств с нулем и единицей; через $\{P\}$ — систему всех бикомпактных множеств базиса $\{F\}$; через $\{U\}$, $U=R-F$, — открытый базис R. Легко видеть, что, во-первых, $\{F\}=\{P\}$ тогда и только тогда, когда R бикомпактно; во-вторых, $\{P\}$ есть дистрибутивная подструктура структуры $\{F\}$, имеющая нуль, но, вообще говоря, не имеющая единицы, и, в-третьих, $P\cap F\in\{P\}$ для всякого $F\in\{F\}$. Можно также показать, что базис $\{F\}$ пространства R может быть выбран так, чтобы выполнялось условие 1.

Условие 1. Для каждой точки $x\in R$ существует такая окрестность $U_0(x)\in\{U\}$, что $\overline{U}_0(x)=P_0\in\{P\}$.

Если пространство R имеет счетный вес, то базис $\{F\}$ может быть выбран, кроме того, счетным.

Определение. Всякую алгебраическую структуру S вместе с отмеченной в ней подструктурой S' назовем структурой локально-бикомпактного T_1-пространства R, если S изоморфна некоторому замкнутому базису $\{F\}$, удовлетворяющему условию 1, так, что при этом изоморфизме структуры S' и $\{P\}$ соответствуют друг другу.

Теорема 1. *Для того чтобы структура S вместе с отмеченной в ней подструктурой S' была структурой некоторого локально-бикомпактного T_1-пространства R, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

I. *S является дистрибутивной структурой с нулем и единицей.*

II. *$a'\wedge a\in S'$ при $a'\in S'$, $a\in S$*.*

III. *Для каждого $a'\in S'$, $a'\neq 0$ существуют такие $b\in S$ и $b'\in S'$, что $a'\leqslant b'$, $a'\wedge b=0$ и $b\vee b'=1$.*

* Символы $\wedge$ и $\vee$ обозначают структурные операции умножения и сложения.

IV. *Если* $a, b \in S$ *и* $b < a$, *то существует* $c' \in S'$ *такой, что* $0 \neq c' \leqslant a$ *и* $b \wedge c' = 0$.

Для T_2-пространств аналогичной теореме 1 является

Теорема 2. *Для того чтобы структура* S *вместе с отмеченной в ней подструктурой* S' *была структурой некоторого локально-бикомпактного* T_2*-пространства* R, *необходимо и достаточно, чтобы помимо условий* I—IV *теоремы* 1 *выполнялось еще условие*

V. *Если* $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $a' \wedge b' = 0$, $a', b' \in S'$, *то существуют такие* $a, b \in S$, *что* $a \wedge b' = 0$, $b \wedge a' = 0$ *и* $a \vee b = 1$.

2. В случае бикомпактных T_1- и T_2-пространств системы $\{P\}$ и $\{F\}$ совпадают друг с другом. Далее, условие 1 (см. выше) выполняется автоматически для всякого базиса $\{F\}$, поскольку в качестве $U_0(x)$ можно принять все пространство R. Поэтому определение структуры в случае бикомпактности пространства R можно формулировать в следующем виде: всякую алгебраическую структуру S, изоморфную некоторому замкнутому базису $\{F\}$ бикомпактного T_1-пространства R, назовем структурой пространства R. Далее, в этом случае условия II и III теоремы 1 также выполняются автоматически. Это очевидно для условия II, для условия же III полагаем $b=0$ и $b'=1$. Кроме того, упрощаются также и условия IV и V (см. ниже). Поэтому теоремы 1 и 2 превращаются в предложения:

Теорема 3. *Для того чтобы структура* S *была структурой бикомпактного* T_1*-пространства* R, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

I. S *является дистрибутивной структурой с нулем и единицей.*

II. *Если* $0 \neq b < a$, *то существует такой элемент* c, *что* $0 \neq c < a$ *и* $b \wedge c = 0$.

Теорема 4. *Для того чтобы структура* S *была структурой некоторого бикомпактного* T_2*-пространства* R, *необходимо и достаточно выполнение, кроме условий* I *и* II *теоремы* 3, *еще и условия*

III. *Если* $a \neq 0, b \neq 0$, $a \wedge b = 0$, *то существуют элементы* a_1 *и* b_1 *такие, что* $a_1 \wedge b = 0$, $b_1 \wedge a = 0$ *и* $a_1 \vee b_1 = 1$.

3. Пусть R_1 и R_2 — локально-бикомпактные T_1-пространства. Мы скажем, что эти пространства имеют изоморфные структуры, если существуют такие их структры S и S^* (вместе с отмеченными в них подструктурами S' и $S^{*\prime}$), между которыми может быть установлено изоморфное соответствие, отображающее также S' на $S^{*\prime}$. В случае бикомпактных пространств это определение соответственно упрощается: требуется лишь изоморфность структур S и S^*.

Теорема 5. *Для гомеоморфности двух локально-бикомпактных* T_1*-пространств необходимо и достаточно существование у них изоморфных структур.*

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии Наук Груз. ССР

Поступило
7 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Wallman, Ann. Math., (2), 39, 112 (1938).