Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

ГЕОФИЗИКА

К. С. ШИФРИН

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА ПРИМЕСЯХ В АТМОСФЕРЕ И ГИДРОСФЕРЕ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 18 V 1947)

1. Задача о рассеянии электромагнитных волн шаром произвольного радиуса, электрические свойства которого характеризуются макроскопическими константами ε, μ, σ, была полностью решена Г. Ми.

Известно, однако, что громоздкие формулы, полученные Ми, заставили ряд исследователей искать более простых, пусть приближенных, решений той же задачи. Здесь следует указать на работу Рокара (1), который получил простую формулу для интенсивности рассеянного света, положив, что поле внутри рассеивающей свет частицы совпадает с внешним полем. Пренебрежение поляризацией вещества внутри частицы Рокар не обосновывает; разумеется, что в таком виде решение Рокара не удовлетворительно.

2. При решении той же задачи мы будем исходить из уравнений Максвелла, которые с помощью вектора Герца в нашем случае могут быть преобразованы к следующему интегральному уравнению, определяющему пространственную часть эффективного электрического поля как вне, так и внутри шара:

$$\vec{E}_{\text{эф}}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \alpha(\vec{r}\,')\vec{E}_{\text{эф}}(\vec{r}\,')\frac{e^{ikR}}{R}dv' - \frac{8\pi}{3}\alpha(\vec{r})\vec{E}_{\text{эф}}(\vec{r}). \quad (1)$$

Здесь $\alpha = \dfrac{\varkappa}{1 + \dfrac{4\pi}{3}\varkappa}$, где $\varkappa = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} + i\dfrac{\sigma}{\omega}$.

Согласно уравнению (1), поле в некоторой точке пространства есть сумма поля, создаваемого внешними телами (источниками света), поля поляризованных элементов объема шара и поля экранирующих (фиктивных) зарядов на поверхности шара. В статическом случае ($\omega = 0$) поле экранирующих зарядов в точности компенсирует поле, созданное поляризацией шара, и эффективное поле внутри шара совпадает с внешним полем.

3. Мы будем искать решение интегрального уравнения (1) методом последовательных приближений, т. е. разлагая искомое эффективное электрическое поле в ряд по α. Такое представление целесообразно, так как в нашей задаче для всех имеющих практический интерес случаев величина α весьма мала. Значение модуля α для различных веществ приводится нами в табл. 1; при этом, разумеется, как для диэлектрической постоянной, так и для электропроводности мы берем только их электронную часть.

Что касается твердых пылинок, то и для них в случае, если $\left|\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right| \ll 1$, $\alpha \ll 1$, так как у них $\sigma \not< 10\,\Omega^{-1}$ см$^{-1}$ (полупроводники) и $\sigma/\omega < 10^{-2}$ для $\omega = 10^{15}$ 1/сек.

Малость α обязана сглаживанию различий в электрических свойствах различных веществ (не металлов), происходящих при увеличении частоты электрического поля в силу того, что при высоких частотах ионы выпадают из игры. Это обстоятельство является, по на-

Таблица 1

Электрические свойства примесей

	$\varepsilon = n^2$	$\left\vert\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right\vert$	σ	$\vert\alpha\vert$
В атмосфере				
Вода	1,77	0,061	0	0,048
Лед	1,71	0,056	0	0,045
HCl	1,56	0,044	0	0,037
В гидросфере				
Воздух	0,56	0,35	0	0,030

шему мнению, весьма существенным для поставленной здесь задачи и позволяет ее значительно упростить. Оно характерно именно для рассеяния света на примесях в атмосфере и гидросфере и не имеет места в случае, интересовавшем Ми.

4. Итак, положим

$$\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{E}^{(0)}_{\text{эф}} + \alpha\vec{E}^{(1)}_{\text{эф}} + \alpha^2\vec{E}^{(2)}_{\text{эф}} + \ldots$$

Из уравнения (1) при этом получим:

$$\vec{E}^{(0)}_{\text{эф}} = \vec{E}_0 \exp\{i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)\},$$

$$\vec{E}^{(1)}_{\text{эф}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \vec{E}_0 \frac{\exp\{i[\vec{k}\,\vec{r} - \omega(t - R/c)]\}}{R} dv' - \frac{8\pi}{3}\vec{E}_0 \exp\{i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)\}$$

и т. д.

Что касается искомого нами рассеянного поля, то в его разложении по α, разумеется, отсутствует нулевой член, т. е.

$$\vec{E}_{\text{рас}} = \alpha\vec{E}^{(1)}_{\text{рас}} + \alpha^2\vec{E}^{(2)}_{\text{рас}} + \ldots$$

При вычислении последовательных приближений для $\vec{E}_{\text{рас}}$ мы можем сильно упростить уравнение (1), заметив, что рассеянное поле ищется нами на расстояниях R от шара значительно большего радиуса a. Именно, из (1) при $R \gg a$ получим:

$$\vec{E}^{(n+1)}_{\text{рас}} = \alpha\frac{4\pi^2}{\lambda^2 R}\int\left\{\vec{R}_0(\vec{R}_0\,\vec{E}^{(n)}_{\text{эф}}) - \vec{E}^{(n)}_{\text{эф}}\right\} e^{ikR} dv.$$

Здесь $\vec{R}_0$ — единичный вектор из шара в направлении наблюдения.

5. В первом приближении для рассеянного поля индикатриса рассеяния естественного света будет

$$J = |\alpha|^2 \frac{16\pi^4}{\lambda^4 R^2} v^2 \frac{(1+\cos^2\beta)}{2} f^2(q). \tag{2}$$

Здесь $v = \frac{4}{3}\pi a^3$, β — угол рассеяния,

$$f(q) = \frac{3}{q^3}(\sin q - q\cos q), \text{ где } \quad q = \frac{4\pi a}{\lambda}\sin\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$

Формула (2) совпадает с формулой, указанной Рокаром. Поляризация в этом приближении будет релеевская. При $q \ll 1$ $f(q) \to 1$ и индикатриса также переходит в формулу, указанную Релеем.

Поток энергии, рассеянный шаром по всем направлениям, будет:

$$\Pi = \frac{CE^2}{4\pi}\pi a^2 |\alpha|^2 F(z). \tag{4}$$

Здесь $z = 8\pi a/\lambda$, а

$$F(z) = \frac{2\pi^2}{z^2}\left\{14(\cos z - 1) - 2z\sin z + (4z^2 - 16)(C_i z - \ln z - C) + 5z^2 + \frac{z^4}{4}\right\}, \tag{5}$$

C — постоянная Эйлера $= 0{,}577\ldots$, $C_i z = -\int\limits_z^\infty \frac{\cos t\,dt}{t}$.

Из формул (4) и (5) легко оценить область применимости первого приближения. Так как мы должны иметь $|\alpha|^2 F(z) \ll 1$, то отсюда получим, что для капельки воды в воздухе первое приближение справедливо для значений $2\pi a/\lambda \ll 3$, а для пузырька воздуха в воде — для значений $2\pi a/\lambda \ll 4$.

6. Во втором приближении для рассеянного поля для индикатрисы рассеяния при малых $k = 2\pi a/\lambda\,(\ll 1)$ получим (в случае естественного света):

$$J_2 = J_1\left\{1 + 2\alpha k^2\left[m_1 + \mu_1\cos\beta + \mu_2\frac{\sin^2\beta\cos\beta}{1+\cos^2\beta}\right]\right\}.$$

Здесь J_1 — индикатриса первого приближения и m_1, μ_1, μ_2 — постоянные: $m_1 = 3{,}35$, $\mu_1 = 0{,}335$, $\mu_2 = 0{,}502$.

В этом же случае для поляризации получим:

$$P_2 = \frac{\sin^2\beta}{1+\cos^2\beta}\left\{1 - 2\alpha k^2\frac{2\mu_2\cos\beta}{1+\cos^2\beta}\right\}^*.$$

7. Простота предложенного метода позволяет распространить его на частицы произвольной формы. Так, для эллипсоида вращения для индикатрисы рассеяния в первом приближении получим:

$$J = |\alpha|^2\frac{16\pi^4}{\lambda^2 R^2} v^2 \frac{(1+\cos^2\beta)}{2} F^2(q, \delta), \tag{6}$$

* При сравнении с вычислениями Блюмера ([2]) нужно иметь в виду, что у Блюмера углы рассеяния отсчитываются в сторону, противоположную нашей.

где v — объем эллипсоида, β — угол рассеяния, а

$$F=\frac{3}{q^3}\left[\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2+\delta^2(1-\delta^2)\varepsilon^4}\right]^{3/2}\left\{\left[1+q^2\frac{\delta^2(1-\delta^2)\varepsilon^4}{2(1-\varepsilon^2)}\right]\sin q-q\cos q\right\}, \quad (7)$$

$$\delta=\frac{\cos\Delta-\cos\gamma}{2\sin(\beta/2)}, \qquad q=\frac{4\pi b}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\delta^2}}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Здесь b — малая полуось, ε — эксцентриситет эллипсоида, Δ и γ — углы, которые образуют с осью эллипсоида направление падающего луча и направление наблюдения. При $\varepsilon\to 0$

$$F(q,\delta)\to f(q).$$

В релеевском случае, т. е. при $q\ll 1$, имеем:

$$F=\left[\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2+\delta^2(1-\delta^2)\varepsilon^4}\right]^{3/2}\left\{1+\frac{3}{2}\,\frac{\delta^2(1-\delta^2)\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2}\right\}.$$

Пусть, например, $\varepsilon=0{,}99$ (палочка) и пусть свет падает вдоль длинной оси ($\Delta=0$). Тогда индикатриса рассеяния будет

$$J\sim\frac{(1+\cos^2\beta)}{2}\,\frac{(1+37{,}5\sin^2\beta)^2}{(1+25\sin^2\beta)^3}.$$

Она имеет вид горизонтальной вытянутой восьмерки.

При малых ε из (7) можно показать, что усредненная по различным ориентациям эллипсоида индикатриса его совпадает с индикатрисой шара того же объема. При малых частицах, но любых ε усредненная индикатриса также является индикатрисой шара, объем которого уже не равен объему частицы.

8. Настоящий метод приложим также и к дымам из частиц, у которых коэффициент преломления не велик, так как электронная проводимость дымовых частиц обычно мала.

В заключение автор выражает благодарность проф. Я. И. Френкелю за ценные советы.

Поступило
18 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Rocard, Rev. d'Optique, 9, 97 (1930). [2] H. Blumer, Z. f. Phys., 32. 119 (1925).