Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Я. АЛЬПЕР

О СВЕРХСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 XI 1947)

Пусть односвязная область ограничена жордановой кривой C и функция

$$w=\varphi(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots \tag{1}$$

отображает взаимно-однозначно и конформно область, внешнюю к кривой C, на область $|w|>r$, внешнюю к кругу.

Кривую линию в плоскости z, которая при отображении $w=\varphi(z)$ переходит в окружность $|w|=R>r$, мы будем обозначать C_R. Рассмотрим систему полиномов $p_0(z)$, $p_1(z),\ldots$, $p_n(z),\ldots$, где $p_n(z)$ — полином n-й степени, для которых выполнено условие: при всяком n и $R>r$ для точек z, лежащих на C_R,

$$|p_n(z)|<M(R+\varepsilon)^n, \qquad (2$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число, а M — константа, которая зависит от ε и R, но не зависит от n.

Ряд полиномов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(z) \tag{3}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\rho} \qquad (\rho>r) \tag{4}$$

сходится, как легко видеть, внутри C_ρ, и притом сходимость равномерная в каждой замкнутой области, лежащей внутри C_ρ. Пусть среди коэффициентов ряда (3) имеются пропуски, удовлетворяющие следующему условию: все коэффициенты ряда с индексами n_1, $n_2,\ldots$ $\ldots, n_k,\ldots$, а также $n'_1, n'_2,\ldots, n'_k,\ldots$, где $n_k<n'_k\leqslant n_{k+1}$, отличны от нуля, а коэффициенты с промежуточными индексами $n_k<n<n'_k$ равны нулю, причем для всех $k=1,2,3,\ldots$ выполняется неравенство

$$n'_k-n_k>\vartheta n_k, \qquad \vartheta>0. \tag{5}$$

Теорема. *Если ряд* (3) *имеет коэффициенты, удовлетворяющие условию* (4), *с пропусками указанного вида и полиномы* $p_n(z)$ *удовлетворяют условию* (2), *то этот ряд имеет подпоследова-*

тельность частичных сумм $s_{n_k} = \sum_{n=0}^{n_k} a_n p_n(z)$, *сходящуюся равномерно в некоторой окрестности каждой регулярной точки его суммы* $f(z)$, *лежащей на* C_ρ.

Этот результат остается справедливым, если контур C состоит из конечного числа внешних друг к другу замкнутых жордановых кривых. В этом случае нужно будет рассматривать функцию $w = \varphi(z)$, отображающую конечносвязную область, внешнюю к C, на область $|w| > r$ так, что бесконечно удаленные точки переходят друг в друга и модуль производной в точке $z = \infty$ равен 1.

В доказательстве теоремы используется конформное отображение и несколько видоизмененный метод Островского, использованный им в доказательстве теоремы о сверхсходимости ряда Тэйлора.

Отметим некоторые приложения установленной теоремы.

1. Пусть C — замкнутая аналитическая кривая Жордана. Полиномы Фабера $P_n(z)$ для односвязной области, ограниченной кривой C, удовлетворяют условию [1]

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = R \tag{6}$$

равномерно для всех точек z, лежащих на C_R при $R > r'$, где r' — некоторое число, меньшее r, которое получается вследствие аналитической продолжаемости функции $w = \varphi(z)$ внутрь области. Из условия (6) вытекает (2), и ряд (3) по полиномам Фабера с коэффициентами, удовлетворяющими условию (4), при $\rho > r'$ будет сходиться внутри C_ρ и расходиться вне C_ρ. Этот ряд, а также разложение всякой функции, голоморфной внутри C или внутри C_ρ $(\rho > r')$, по полиномам Фабера при наличии пропусков (5) будет сверхсходящимся в смысле Островского в окрестности каждой регулярной точки $f(z)$, лежащей на C, соответственно C_ρ.

Полученный вывод полностью справедлив для рядов по полиномам Чебышева $T_n(z)$, относящимся к области, ограниченной аналитической кривой C.

2. Пусть C — спрямляемая кривая Жордана и $\{p_n(z)\}$ — система полиномов, ортогональных по спрямляемому контуру C с весом $n(z)$, положительным и непрерывным на C:

$$\int_C n(z)\, p_k(z)\, \overline{p_l(z)}\, |dz| = \varepsilon_{kl},$$

де $\varepsilon_{kl} = 0$, если $k \neq l$, и $\varepsilon_{kl} = 1$ при $k = l$.

Полиномы $p_n(z)$ удовлетворяют условию $p_n(z) < M \left(\frac{R}{r}\right)^n$ для всех z, лежащих на C_R $(R > r)$, где M зависит от R, но не зависит от n [2]. Ряд типа (3) по ортогональным полиномам с коэффициентами, удовлетворяющими условию $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho/r}$ $(\rho > r)$, будет сходиться внутри C_ρ, но не может сходиться ни в какой области, лежащей вне C_ρ.

Этот ряд, а также разложение всякой функции, голоморфной внутри C_ρ с особенностями на C_ρ $(\rho > r)$, при наличии пропусков (5) в последовательности коэффициентов будет, согласно нашей теореме, сверхсходящимся в окрестности каждой регулярной точки его суммы, лежащей на C_ρ.

3. Пусть C — произвольная замкнутая жорданова кривая или конечное число таких кривых, внешних друг к другу. Пусть, далее, точки $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ лежат на C и выбраны так, что на C_R $(R > r)$ равномерно выполняется равенство $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|p_n(z)|} = R$ *, где $p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$. Ряд (3) по этим полиномам представляет интерполяционный ряд Ньютона ([2]). Если коэффициенты a_n удовлетворяют условию (4) и среди них есть пропуски (5), то этот ряд будет сверхсходящимся в точках C_ρ, регулярных для его суммы.

Отметим еще два результата, вытекающих из общей теоремы.

Рассмотрим ряд (3), где $p_n(z) = [p(z)]^k (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_l)$ и $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_\lambda)$, $n = k\lambda + l$, $0 \leqslant l \leqslant \lambda - 1$.

Если $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\mu}$, то такой ряд сходится внутри лемнискаты $|p(z)| = \mu^\lambda$ и расходится вне ее. При μ достаточно малом лемниската состоит из конечного числа овалов. Если среди коэффициентов ряда имеются пропуски (5), то ряд будет сверхсходиться в окрестности каждой регулярной точки его суммы на каждом из овалов линии $|p(z)| = \mu^\lambda$.

Рассмотрим еще интерполяционный ряд Абеля

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

где $P_n(z) = n! \int\limits_{z_0}^{z} dz' \int\limits_{z_1}^{z'} dz'' \ldots \int\limits_{z_{n-1}}^{z^{(n+1)}} dz^{(n)}$, числа $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ удовлетворяют условию $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n - z_{n-1}|$ сходится; здесь $a_n = f^{(n)}(z_n)/n!$.

Для полиномов $P_n(z)$ справедлива вытекающая из исследований В. Л. Гончарова оценка $|P_n(z)| < M(R + \varepsilon)^n$ в круге $|z| < R$ при любом $\varepsilon > 0$, где M не зависит от n. Если $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$, то ряд сходится внутри круга $|r| < \rho$, но не может сходиться ([3]) в какойтлибо области, внешней к этому кругу. Из общей теоремы следуесверхсходимость ряда Абеля при наличии пропусков (5) в окрестности каждой регулярной точки $f(z)$, лежащей на $|z| = \rho$.

Если в условии (5) будет $n'_k = n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$' то получаются пропуски адамаровского типа, и во всех рассмотренных случаях функции, определенные разложениями, будут аналитически непродолжаемы за соответствующие линии сходимости C или C_ρ.

В третьем и четвертом случаях можно получить ряды, представляющие несколько различных функций, аналитически не продолжаемых через соответствующие контуры, внешние друг к другу.

Научно-исследовательский
физико-математический
институт Ростовского н/Д
государственного университета
им. В. М. Молотова

Поступило
24 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Faber, Crell J., **150**, 79 (1920). [2] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation, 1935, §§ 6,6; 6,7; 7,2; 7,3. [3] П. П. Коровкин, Уч. зап. ЛГУ, № 37, в. 6 (1939).

* При этом условии, как показал Фейер, всякая функция, голоморфная внутри и на C, разлагается в ряд Ньютона.