Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

ФИЗИКА

Е. А. ВАЙНРИБ и Г. В. СПИВАК

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СОСТОЯНИИ

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 15 XI 1947)

Функция распределения должна быть функцией таких аргументов, которые остаются неизменными при движении системы вдоль фазовой линии [1,2]. Этими аргументами являются аддитивные интегралы движения.

Здесь могут встретиться три случая: 1) на систему не действуют внешние силы; 2) на систему действуют силы, не зависящие от координат системы; 3) силы действуют на часть системы, силы неоднородны или приложены к границам системы.

В первом случае функция распределения зависит от энергии системы (каноническое распределение Гиббса), во втором случае вся система в целом будет находиться в поступательном и вращательном движении. Переходя во втором случае к подвижной системе координат, можно привести функцию распределения к зависимости лишь от энергии. В первом и во втором случаях система будет находиться в состоянии статистического равновесия [3].

Рассмотрение третьего случая в достаточно общем виде, нахождение функции распределения для этого случая и составляет основную цель настоящей работы.

В этом случае приложенные к системе силы таковы, что вызывают потоки соответствующих величин через систему. В третьем случае мы оперируем с неравновесной системой, которая в установившемся состоянии также должна определяться функцией, соответствующей наивероятнейшему распределению частиц по координатам и скоростям.

Функция распределения будет в этом общем случае описываться, помимо прежних, дополнительными аргументами потоков трех величин: энергии, импульса и момента импульса. Мы примем потоки импульса и момента импульса направленными перпендикулярно к силам, вызвавшим поток. Поток энергии будет иметь направление, совпадающее с направлением вызвавшей его силы. Так как система не должна рассеиваться, то функция распределения будет еще характеризоваться дополнительным нормирующим условием. Потоки массы или электричества через систему не описываются второй группой дополнительных условий, а входят в условие, характеризующее импульс, сообщаемый системе.

Окончательно для одноатомного газа из нейтральных или заряженных частиц функция распределения будет зависеть от 17 аргументов: энергии, трех компонент потока энергии, массы системы, трех компонент потока массы (электричества), трех компонент потока импульса, трех компонент момента импульса, трех компонент потока момента импульса. Число соотношений, необходимых для нахождения функции распределения, лежит, таким образом, для частных задач в пределах:

$$2 \leqslant \nu \leqslant 17.$$

Нижний предел соответствует первому случаю, когда система предоставлена самой себе, т. е. не приложены внешние силы*.

Нахождение функции распределения сводится к нахождению такой функции, которая удовлетворяет, с одной стороны, H-функции Больцмана, а с другой стороны, всем или части указанных выше 17 соотношений (в зависимости от общности задачи). Так как мы ищем решение, соответствующее наивероятнейшему распределению, то H-функция имеет условный экстремум. Применяемый метод нахождения функции распределения носит, таким образом, полутермодинамический характер и существенно отличается от метода кинетического уравнения.

Важно отметить, что нахождение „возмущенной" внешними силами функции распределения возможно для всех трех статистик, если надлежащим образом отразить специфическую для каждой статистики комбинаторику в H-функции. Условия, налагаемые на функцию распределения, могут быть заданы или на основе экспериментальных данных, автоматически учитывающих тот или иной вид взаимодействия между частицами, или путем соответствующего расчета. Герцфельд ([4]), критически оценивающий частную задачу о нарушении функции распределения тепловым потоком, рассмотренную Э. Эйнштейн ([5]), указывает, что применение H-теоремы при наличии стационарного режима в отсутствие статистического равновесия дает все же наивероятнейшее распределение.

Обобщенная на произвольную статистику H-функция запишется в виде ([6])

$$H = \int \left[\gamma \ln (1 - \gamma f) - f \ln \left(\frac{1}{f} - \gamma \right) \right] d\tau, \tag{1}$$

где $\gamma = 0, +1, -1$ соответствует статистике Максвелла — Больцмана, Ферми, Бозе — Эйнштейна.

Дополнительные 6 условий гласят**:

$$\int f d\tau = n, \quad \frac{1}{n} \int \varepsilon f d\tau = \varepsilon_m, \quad \frac{1}{n} \int \vec{p} f d\tau = \vec{p}_m, \quad \frac{1}{n} \int \vec{M} f d\tau = \vec{M}_m, \tag{2}$$

$$\frac{1}{n} \int \varepsilon \vec{v} f d\tau = (\varepsilon \vec{v})_m, \quad \frac{1}{n} \int \vec{P} f d\tau = \vec{P}_m, \quad \frac{1}{n} \int \vec{\mathfrak{M}} f d\tau = \vec{\mathfrak{M}}_m; \tag{3}$$

n — число частиц в 1 см^3; ε — энергия; $\vec{p} = e\vec{v}$ или $m\vec{v}$; $\vec{M}$ — момент импульса заряда или массы; $d\tau$ — элемент фазового объема; $\vec{P}$ — поток количества движения; $\vec{\mathfrak{M}}$ — поток момента количества движения, связанный с одной частицей.

Условия (2) задают средние значения подъинтегральных величин, соответствующих случаю статистического равновесия, при котором вся система в целом движется поступательно и вращательно. Условия (3) соответствуют заданию средних величин потока энергии, импульса и момента импульса, тоже связанных с одной частицей.

Что касается потока электричества или массы, то он учтен в третьем интеграле условий (2). Интересно отметить, что силы вихре-

* Эти 17 соотношений вытекают из меньшего числа условий, которые написаны ниже.

** Первое нормирующее условие, входящее в (2), не отражает эффектов, вызванных внешними силами, а характеризует лишь, что система не рассеивается.

вого характера (например магнитное поле) непосредственно учтены в последних интегралах условий (2) и (3) и неявно входят, например, в третий интеграл условий (2), воздействуя на потоки массы и электричества. Таким образом, правые части соотношений (2) и (3) должны быть заданы из эксперимента или оценены теоретически из какой-либо модели явления.

Беря вариации по f (1), (2), (3) и умножая (2), (3) на 17 произвольных постоянных множителей*, складывая полученные произведения с вариацией (1) и приравнивая сумму нулю (при условии $\delta f\, d\tau \neq 0$), находим функцию распределения, определяемую выражением

$$f\,[\exp(1-\gamma^2+\lambda_1+\lambda_2\varepsilon+\lambda_3 v_x\varepsilon+\lambda_4 v_y\varepsilon+\lambda_5 v_z\varepsilon+ \\ +\lambda_6 p_x+\lambda_7 p_y+\lambda_8 p_z+\lambda_9 M_x+\lambda_{10} M_y+\lambda_{11} M_z+\lambda_{12} p_{yz} v_x+\lambda_{13} p_{xz} v_y+ \\ +\lambda_{14} p_{xy} v_z+\lambda_{15} M_{yz} v_x+\lambda_{16} M_{xz} v_y+\lambda_{17} M_{xy} v_z)+\gamma]=1. \quad (4)$$

Для определения координат $\lambda_1, \ldots, \lambda_{17}$ необходимо найденную функцию распределения подставить в условия (2) и (3) и решить совместно 17 алгебраических уравнений.

Из общего метода можно найти частные решения. Функция распределения оказывается, таким образом, функцией не только энергии, как это принимается в каноническом распределении Гиббса, но должна в общем виде определяться совокупностью условий (2) и (3). Мы имеем, таким образом, 6 независимых условий, каждое из которых усреднено на одну частицу. С другой стороны, как известно (7), описание системы в обобщенных координатах характеризуется $2rn$ условиями, где r — число степеней свободы одной частицы. Так как наши условия усреднены на 1 частицу, то таких условий должно быть в n раз меньше. Учитывая число степеней свободы одноатомного газа, равное 3, находим $2r=6$, что и соответствует числу условий, налагаемых нами на функцию распределения.

Из общего метода, развитого нами, могут быть получены частные случаи.

1. Внешние силы отсутствуют. Из 17 соотношений остаются лишь два. Функция распределения примет вид:

$$f\,[\gamma+\exp(1-\gamma^2+\lambda_1+\lambda_2\varepsilon)]=1;$$

задавая $\gamma=0, +1, -1$, получаем функции распределения Максвелла — Больцмана, Ферми и Бозе — Эйнштейна.

2. Перенос импульса через газ. В этом случае имеет место градиент скорости отдельных слоев газа друг относительно друга. Из 17 соотношений останутся 8, и функция распределения примет вид (4) при $\gamma=0$:

$$f=\exp(-1-\lambda_1-\lambda_2 p_x-\lambda_3 p_y-\lambda_4 p_z-\lambda_5 p_z v_x- \\ -\lambda_6 p_x v_y-\lambda_7 p_y v_z-\lambda_8\varepsilon), \quad (5)$$

где обозначено $p_{yz}=p_z,\ p_{xz}=p_x,\ p_{xy}=p_y$.

Эта функция для данного случая получена А. К. Тимирязевым (8).

3. Перенос кинетической энергии вызван градиентом температуры. Исключая из рассмотрения последний интеграл условий (2) и два последних интеграла условий (3), находим, что функция распределения зависит от 8 констант (как и выше, при $\gamma=0$)

$$f=\exp(-1-\lambda_1-\lambda_2 p_x-\lambda_3 p_y-\lambda_4 p_z-\lambda_5\varepsilon-\lambda_6\varepsilon v_x-\lambda_7\varepsilon v_y-\lambda_8\varepsilon v_z).$$

Эта функция найдена в задаче теплопереноса Э. Эйнштейна (4).

* Легко видеть, что условия (2), (3) дают в развернутом виде 17 соотношений.

4. Функция распределения в потоке электронного газа, подчиняющегося статистике Максвелла—Больцмана. Эту задачу решил Эпштейн ([9]). Из всех наших соотношений останутся лишь 3 ($\gamma = 0$):

$$f = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 p_x - \lambda_3 \varepsilon).$$

Определение констант дает:

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left[(v_x - \bar{v}_x)^2 + v_y^2 + v_z^2\right]\right\}.$$

где $\bar{v}_x$ — дрейф всего электронного газа, определяемый третьим интегралом условий (2), где $|\vec{p}_m/m| = \bar{v}_x$.

Следует отметить, что функция, полученная Эпштейном, содержит еще зависимость от координат (через потенциал φ). Этот случай легко получить обобщением условий (2), (3), если в интегралах принять за элемент фазового объема $d\tau = dx\,dy\,dz\,dv_x\,dv_y\,dv_z$, а не $dv_x\,dv_y\,dv_z$; тогда:

$$f = Nb^{-1}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{e\varphi}{kT} - \frac{m}{2kT}\left[(v_x - \bar{v}_x)^2 + v_y^2 + v_z^2\right]\right\}.$$

Здесь N — полное число частиц между электродами (на 1 см^2 поверхности), $b = \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{e\varphi/kT}\,dx$, $x_2 - x_1$ — расстояние между электродами.

Новым в нашей работе является развитие общего метода нахождения функций распределения путем использования H-функции в виде, пригодном для всех трех статистик; введение момента количества движения и потока момента количества движения в условия, определяющие функцию распределения; учет действия, таким образом, вихревых эффектов от действия механических, магнитных или электрических сил в неравновесных системах. Показано, что найденные нами 17 соотношений определяют 6 условий, делают метод замкнутым и пригодным для нахождения функций распределения для других задач, которые могут встретиться.

Поступило
15 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. W. Gibbs, Elementary Principles of Statistical Mechanics, Leipzig, 1905. [2] М. А. Леонтович, Статистическая физика, 1944. [3] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, 1938. [4] К. Ф. Герцфельд, Кинетическая теория материи, 1935, гл. III, стр. 181. [5] E. Einstein, Ann. d. Phys., 69, 241 (1922). [6] L. Nordheim, Müller-Pouillets, Lehrbuch d. Phys., 11 Auff., 4, 4 Hälfte, 1925. [7] А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи, 1923, лекция VIII. [8] А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи, 1939. [9] P. S. Epstein, Ber. d. Deutsch. Phys. Ges., 21, 85 (1919).