Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 4 XI 1947)

Пусть $y(x)$ есть однозначная и кусочно-непрерывная функция с ограниченной вариацией в промежутке $(0, l)$. Пусть производные функции $y(x)$ до $k-1$-го порядка включительно также принадлежат этому классу функций для значения x между 0 и l.

Рассмотрим разложение $y(x)$ в промежутке $(0, l)$ в ряд синусов

$$\frac{1}{2}\{y(x+0)+y(x-0)\}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Обозначим через a_m точки разрыва $y(x)$ в промежутке $(0, l)$. Число их конечно. С помощью точек a_m, концов промежутка $(0, l)$ и точек разрыва $y'(x)$ можно образовать такие частные промежутки, что в каждом из них $y(x)$ будет иметь ограниченную интегрируемую производную $y'(x)$. Следовательно,

$$(S)\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,dy(x)=(R)\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,y'(x)\,dx+\sum_m A_m\cos\frac{n\pi a_m}{l},$$

где интеграл в левой части равенства рассматривается в смысле Стилтьеса, а интеграл в правой части — обычный определенный интеграл Римана. Кроме того, A_m обозначает скачок $y(x)$ в точке a_m и суммирование распространяется на все индексы m, для которых точки a_m лежат в промежутке $(0, l)$.

Формула интегрирования по частям показывает, что

$$\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,dy(x)=(-1)^n y(l)-y(0)+\frac{n\pi b_n}{2}.$$

Следовательно,

$$b_n=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}y(l)+y(0)\right]+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\sum_m A_m\cos\frac{n\pi a_m}{l}+\frac{2}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,y(x)\,dx.$$

С помощью аналогичных рассуждений легко установить, что

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}y(l)+y(0)\right]+\frac{2}{n\pi}\sum_m A_m \cos\frac{n\pi a_m}{l}-$$

$$-\frac{2l}{n^2\pi^2}\sum_r B_r \sin\frac{n\pi a_r}{l}-\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\,y''(x)\,dx$$

и т. д. Здесь a_r обозначает точку разрыва функции $y'(x)$, а B_r — скачок $y'(x)$ в точке a_r.

Полученные формулы позволяют легко выписать разрывные интегралы линейных дифференциальных уравнений, определяемые в промежутке $(0, l)$ начальными (граничными) условиями и скачками функций $y^{(\lambda)}(x)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Рассмотрим сжато-изогнутую горизонтальную балку на сплошном упругом основании. Поместим начало координат в центре тяжести левого опорного сечения балки и для удобства последующего изложения ось x направим горизонтально слева направо, а ось y перпендикулярно к ней вверх.

Дифференциальное уравнение изгиба балки будет иметь вид

$$y^{(\mathrm{IV})}(x)+\frac{S}{EJ}y''(x)+\frac{k}{EJ}y(x)=\frac{q(x)}{EJ}, \tag{1}$$

где EJ — постоянная жесткость балки при изгибе, $q(x)$ — интенсивность вертикальной нагрузки, расположенной в плоскости, проходящей через продольную ось балки и одну из главных осей инерции (каждого поперечного сечения балки), k — погонный коэффициент оседания, S — величина осевой сжимающей силы.

Легко удостовериться, что, пользуясь выведенными выше формулами для b_n, можно получить коэффициенты Фурье для $y(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1). Они зависят от вертикальной нагрузки, действующей на балку, от $y(0)$, $y(l)$, $y''(0)$, $y''(l)$ и величин $m=\frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$ и $\alpha=\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{S}{EJ}}$.

Окончательно получается

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(n^2-\alpha^2)}{n^4+m^4-\alpha^2n^2}\left((-1)^{n+1}y(l)+y(0)\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-$$

$$-\frac{2l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n^4+m^4-\alpha^2n^2}\left((-1)^{n+1}y''(l)+y''(0)\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-$$

$$-\frac{2l^2}{\pi^3 EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n^4+m^4-\alpha^2n^2}\sum_k m_k\cos\frac{n\pi a_k}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2l^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^4+m^4-\alpha^2n^2}\sum_\nu P_\nu\sin\frac{n\pi a_\nu}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2l^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^4+m^4-\alpha^2n^2}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\,q(x)\,dx\right]\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2}$$

где m_k — сосредоточенный момент, приложенный к балке в точке a_k; P_ν — сосредоточенная сила, приложенная к балке в точке a_ν. Суммирование распространяется на индексы k и ν всех заданных сосредоточенных моментов и сил, действующих на балку. Предполагается, что $n^4+m^4-\alpha^2 n^2 \neq 0$. Направление P_i вверх и m_k по часовой стрелке считаются положительными.

Уравнение (2) является общим уравнением упругой линии нашей балки. Неизвестные $y(0)$, $y(l)$, $y''(0)$ и $y''(l)$ подбираются так, чтобы удовлетворялись краевые условия в зависимости от типа опор. Если балка на упругом основании подвержена не сжатию, а растяжению, то соответствующее общее уравнение изогнутой оси будет отличаться от прежнего только знаком при α^2.

В случае разложения интеграла уравнения (1) в ряд косинусов все коэффициенты разложения, кроме a_0 (свободного члена), получаются как выше. Свободный член a_0 может быть получен путем почленного интегрирования (1). При этом следует использовать формулу

$$\int_0^l y^{(k)}(x)\,dx = y^{(k-1)}(l) - y^{(k-1)}(0) - \sum \Delta,$$

где $\sum \Delta$ — сумма скачков $y^{(k-1)}(x)$ в промежутке $(0, l)$.

Уравнение упругой линии сжато-изогнутой балки, опертой по концам, выведенное С. П. Тимошенко ([1]) методом потенциальной энергии, может быть получено в частности из уравнения (2), полагая $m=0$. Разложение прогибов по С. П. Тимошенко для некоторых видов нагрузки сходится со скоростью $1/n^3$ и для вычисления изгибающего момента и поперечной силы непригодно. Другой частный случай, именно случай разложения в ряд Фурье прогибов продольно сжатой балки (нагруженной только лишь сплошной нагрузкой), один конец которой абсолютно заделан, другой же свободно оперт, составлял предмет недавнего исследования A. G. Strandhagen'a ([2]). Разложение Strandhagen'a сходится медленно даже после выделения элементарно суммируемых медленно сходящихся частей *.

Случай $\alpha=0$, т. е. случай разложения прогибов упругой линии балки, лежащей на сплошном упругом основании, в тригонометрический ряд, насколько мне известно, не изучался исследователями во всех деталях. Конечно, я тут не имею в виду труда акад. А. Н. Крылова ([3]), в котором дается разложение $y(x)$ по фундаментальным (гиперболо-тригонометрическим) функциям, удовлетворяющим дифференциальному уравнению изгиба балки и граничным условиям.

Для улучшения быстроты сходимости нашего разложения (2) рассмотрим решение $\bar{y}(x)$ дифференциального уравнения

$$\bar{y}^{(\mathrm{IV})}(x) = q(x)/EJ.$$

---

* Элементарное суммирование медленно сходящихся частей возможно и у нас, если воспользоваться рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2}\frac{x}{l},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-\alpha^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2\alpha^2}\left[\frac{\sin \alpha\pi\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\sin \alpha\pi} - \left(1-\frac{x}{l}\right)\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2-\alpha^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2\alpha^2}\left[\frac{\sin \frac{\alpha\pi x}{l}}{\sin \alpha\pi} - \frac{x}{l}\right].$$

Пусть оно связано с интересующим нас решением $y(x)$ (с интегралом уравнения (1) с неисчезающими одновременно k и S) с помощью соотношений

$$\bar{y}(0)=y(0), \quad \bar{y}(l)=y(l), \quad \bar{y}''(0)=y''(0), \quad \bar{y}''(l)=y''(l).$$

Потребуем от $\bar{y}(x)$ и ее первой производной непрерывности в промежутке $(0, l)$. Что касается второй и третьей производных $\bar{y}(x)$, то пусть они имеют те же точки прерывности и скачки, что и вторая и третья производные от $y(x)$. Построение такого $\bar{y}(x)$ легко осуществимо или с помощью общего уравнения упругой линии балки ([4]), или с помощью обобщенной формулы Маклорена ([5]). Полагая теперь в уравнении (2) $m=\alpha=0$, мы получим разложение $\bar{y}(x)$ в ряд Фурье. Вычисляя разность $y(x)-\bar{y}(x)$ удостоверяемся, что

$$y(x)=\bar{y}(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{m^4}{n(n^4+m^4-\alpha^2n^2)}((-1)^{n+1}y(l)+y(0))\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-$$

$$-\frac{2l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha^2n^2-m^4}{n^3(n^4-\alpha^2n^2+m^4)}((-1)^{n+1}y''(l)+y''(0))\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-$$

$$-\frac{2l^2}{\pi^3EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha^2n^2-m^4}{n^3(n^4-\alpha^2n^2+m^4)}\sum_k m_k\cos\frac{n\pi a_k}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2l^3}{\pi^4EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha^2n^2-m^4}{n^4(n^4-\alpha^2n^2+m^4)}\sum_\nu P_\nu\sin\frac{n\pi a_\nu}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2l^3}{\pi^4EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha^2n^2-m^4}{n^4(n^4-\alpha^2n^2+m^4)}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}q(x)\,dx\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Это и есть в практически удобном виде общее уравнение как угодно нагруженной сжато-изогнутой балки на упругом основании. С помощью него можно определить прогиб, поворот, изгибающий момент и поперечную силу для любого значения абсциссы x. Например, прогиб под грузом P, когда груз находится посередине пролета, для балки, свободно лежащей на опорах, будет

$$y\left(\frac{l}{2}\right)=\bar{y}\left(\frac{l}{2}\right)-\frac{2l^3P}{\pi^4EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2n^2-m^4}{n^4(n^4-\alpha^2n^2+m^4)}\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

где $\bar{y}\left(\frac{l}{2}\right)=-\frac{Pl^3}{48EJ}$.

Заметим, что полученное нами общее уравнение сжато-изогнутой (растянутой) балки на упругом основании с успехом может быть использовано для расчета неразрезной сжато-изогнутой (растянутой) балки на сплошном упругом основании, опирающейся, кроме сплошного упругого основания, на промежуточные жесткие опоры.

Тбилисский государственный университет
им. И. В. Сталина

Поступило
4 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946. [2] A. G. Strandhagen, Quarterly of Applied Mathematics, 1, 4, 346 (1944). [3] А. Н. Крылов, О расчете балок, лежащих на упругом основании, изд. АН СССР, Л., 1931. [4] Ш. Е. Микеладзе, ДАН, 50, 117 (1945). [5] Ш. Е. Микеладзе, там же, 52, № 9 (1946).