Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О П-ОТДЕЛИМЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 27 X 1947)

1. Интерес к разрешимым группам и к теоремам типа Силова в последнее время значительно повысился. Повидимому, мы имеем здесь дело с одним из главнейших узлов всей теории групп. Поэтому и установление границ применимости теорем типа Силова представляется своевременным и значительным.

В настоящей работе показывается, что полученное Ф. Голлом для разрешимых конечных групп обобщение теоремы Силова [1] сохраняется в основном, т. е. в объеме утверждений 2.1 и 2.2 работы Голла, и для групп более широкого класса, которые мы будем называть П-отделимыми группами. При этом оказывается, что для такого перенесения результатов Голла существенно то обстоятельство, что исследуемые группы относятся к разряду групп, у которых композиционные длины как их самих, так и их подгрупп достаточно велики.

2. Определение. Пусть П — некоторое непустое множество простых чисел и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая конечная группа. Тогда $\mathfrak{G}$ назовем П-отделимой или отделимой относительно множества П, если каждый индекс композиционного ряда или не делится ни на одно простое число из П, или же делится на некоторую степень только одного элемента П.

Хотя у единичной группы $\mathfrak{E}$, строго говоря, нет композиционного ряда, но мы и $\mathfrak{E}$ причислим к разрешимым и П-отделимым группам — при любом множестве П.

Из этого определения легко получаются следующие утверждения:

(1) Всякая подгруппа и всякая факторгруппа П-отделимой группы тоже П-отделимы.

(2) Всякая конечная группа отделима относительно любого множества П, состоящего только из одного простого числа.

(3) Разрешимая группа является частным видом П-отделимой в случае, если П содержит все простые делители порядка группы.

(4) p-разрешимая группа [2] — это группа, отделимая относительно всякой пары вида (p, q), где q — любой делитель порядка группы.

(5) Группа П-отделима, если $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, q\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые числа, относительно которых $\mathfrak{G}$ разрешима, а q — любое простое число.

Теорема. *Если $m > 1$ — такой делитель порядка g П-отделимой группы $\mathfrak{G}$, что $(m, g/m) = 1$ и если все простые делители m входят в П, то $\mathfrak{G}$ имеет подгруппы порядка m, причем все они сопряжены в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем среди таких групп группу $\mathfrak{G}$, имеющую наименьший порядок.

Следовательно, существуют у группы $\mathfrak{G}$ такие Π и m, удовлетворяющие условиям теоремы, к которым утверждение теоремы неприменимо.

Так как при $m=g$ теорема верна, то должно быть $1<m<g$. Пусть $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2},\ldots,p_k^{\alpha_k}$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа; $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0, \ldots, \alpha_k>0$. Число k должно быть >1, так как при $k=1$ теорема верна, обращаясь просто в теорему Силова.

Пусть

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\supset\mathfrak{N}_1\supset\mathfrak{N}_2\supset\ldots\supset\mathfrak{N}_l=\mathfrak{E} \tag{6}$$

некоторый композиционный ряд $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ Π-отделима, то на основании теоремы Жордана — Гёльдера имеем:

(7) Каждый индекс ряда (6) или не делится ни на одно простое число из Π или же делится на некоторую степень только одного элемента Π.

Далее, возможны следующие случаи:

1) Порядок $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ не делится ни на одно $p_i\in\Pi$. В этом случае порядок n_1 группы $\mathfrak{N}_1$ разделится на m и $(m, n_1/m)=1$. Так как $\mathfrak{N}_1$ по (1) Π-отделима и так как $1<n_1<g$, то, на основании сделанного относительно $\mathfrak{G}$ предположения, группа $\mathfrak{N}_1$ должна содержать подгруппы порядка m, причем все они будут в $\mathfrak{N}_1$ сопряжены.

Так как $\mathfrak{N}_1$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и ее индекс взаимно прост с m, то все подгруппы порядка m из $\mathfrak{G}$ должны содержаться в $\mathfrak{N}_1$ и тем самым к $\mathfrak{G}$ теорема применима. Полученное противоречие доказывает теорему в рассматриваемом случае.

2) Порядок $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ делится на некоторое $p_i\in\Pi$.

Тогда порядок $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ имеет вид: $p_i^{\beta_i}n$, $\beta_i>0$, $(p_i, n)=1$, $n\geqslant 1$, где n согласно (7) уже не делится ни на какое простое число из Π. Следовательно, в этом случае порядок $\mathfrak{N}_1$ должен делиться на $\delta=m/p_i^{\beta_i}$. Так как $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ являются наивысшими степенями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, входящими в порядок группы $\mathfrak{G}$, то очевидно, что $(\delta, n_1/\delta)=1$. Число $\delta=m/p_i^{\beta_i}>1$ вследствие того, что $k>1$. Порядок $\mathfrak{N}_1$ меньше порядка $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{N}_1$ по (1) Π-отделима. Следовательно, для $\mathfrak{N}_1$ и числа $m/p_i^{\beta_i}$ теорема применима. Итак, пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\lambda$ — все различные подгруппы порядка $\delta=m/p_i^{\beta_i}$ из $\mathfrak{N}_1$. Если $\lambda=1$, то $\mathfrak{S}_1$ будет единственной подгруппой порядка $m/p_i^{\beta_i}$ из $\mathfrak{N}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{S}_1$ в силу инвариантности $\mathfrak{N}_1$ в $\mathfrak{G}$ будет также инвариантной подгруппой в $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_i$, где $\mathfrak{P}_i$ — какая-либо силовская подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$ из $\mathfrak{G}$, будет подгруппой искомого порядка m группы $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\lambda>1$. Так как $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\lambda$ по условию сопряжены $\mathfrak{N}_1$, то λ является индексом нормализатора любой из этих подгрупп (например, группы $\mathfrak{S}_1$) в группе $\mathfrak{N}_1$. Так как порядок этого нормализатора должен делиться на порядок $\delta=m/p_i^{\beta_i}$ группы $\mathfrak{S}_1$ и так как, по сказанному выше $(\delta, n_1/\delta)=1$, то λ взаимно просто с $p_1p_2\ldots p_k$. Но так как $\mathfrak{N}_1$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то совокупность групп $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\lambda$ составит полный класс сопряженных подгрупп и во всей группе $\mathfrak{G}$. Следовательно, λ будет индексом нормализатора любой из групп $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\lambda$ (например, нормализатора $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_1}$ группы $\mathfrak{S}_1$) и во всей группе $\mathfrak{G}$. Так как λ по сказанному выше взаимно просто с $p_1p_2\ldots p_k$, то порядок $\mathfrak{v}^1$ группы $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_1}$ должен делиться на m. Группа $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_1}$ по (1) Π-отделима, ее порядок $\mathfrak{B}_1<g$ (так как теперь $\lambda>1$) и $(m, \mathfrak{B}_1/m)=1$.

Таким образом, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_1}$ (а следовательно и $\mathfrak{G}$) содержит подгруппы искомого порядка m. Итак, при любом λ $\mathfrak{G}$ имеет по крайней мере одну подгруппу $\mathfrak{S}$ порядка m. Покажем теперь, что все такие группы сопряжены в $\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{S}^*$ — какая-либо другая подгруппа порядка m из $\mathfrak{G}$. Рассмотрим отдельно оба случая: $\lambda=1$ и $\lambda>1$. Если $\lambda=1$, то, компонируя $\mathfrak{S}_1$ с $\mathfrak{S}$ и с $\mathfrak{S}^*$, видим, что $\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}^*$. Пусть $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{P}_i^*$ — силовские подгруппы порядка $p_i^{\alpha_i}$ из $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ соответственно. Тогда, очевидно, имеем:

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_i,\qquad \mathfrak{S}^*=\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_i^*. \tag{8}$$

Группы $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{P}_i^*$, как силовские в $\mathfrak{G}$, сопряжены

$$\mathfrak{P}_i^*=D^{-1}\mathfrak{P}_iD,\qquad D\in\mathfrak{G}. \tag{9}$$

В силу инвариантности $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{G}$ (так как $\lambda=1$) имеем, согласно (8) и (9):

$$D^{-1}\mathfrak{S}D=D^{-1}\mathfrak{S}_1DD^{-1}\mathfrak{P}_iD=\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_i^*=\mathfrak{S}^*.$$

Таким образом, при $\lambda=1$ любые две подгруппы порядков m из $\mathfrak{G}$ сопряжены между собой.

Пусть теперь $\lambda>1$. Компонируя тогда $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ с $\mathfrak{N}_1$, видим, что $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ имеют с $\mathfrak{N}_1$ пересечения порядка $m/p_i^{\beta_i}$. Это будут, очевидно, какие-то две (различные или совпадающие) подгруппы $\mathfrak{S}_r$ и $\mathfrak{S}_s$ из совокупности $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\lambda$. Так как $\mathfrak{S}_r$ и $\mathfrak{S}_s$ будут инвариантны, соответственно, в $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ ($\mathfrak{N}_1$ инвариантна в $\mathfrak{G}$), то $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ войдут в нормализаторы $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_r}$ и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}$ подгрупп $\mathfrak{S}_r$ и $\mathfrak{S}_s$ в группе $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_r},\qquad \mathfrak{S}^*\subseteq\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}. \tag{10}$$

Так как по условию $\mathfrak{S}_r$ и $\mathfrak{S}_s$ сопряжены уже в $\mathfrak{N}_1$, то и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_r}$ и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}=F^{-1}\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_r}F,\qquad F\in\mathfrak{G}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$F^{-1}\mathfrak{S}F\subseteq\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s},\qquad \mathfrak{S}^*\subseteq\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}. \tag{12}$$

Так как в рассматриваемом случае $\lambda>1$, то $\mathfrak{S}_s$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}$ имеет порядок, меньший порядка $\mathfrak{G}$. Поэтому для $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}$ теорема справедлива. Отсюда, учитывая (12), заключаем, что $F^{-1}\mathfrak{S}F$ и $\mathfrak{S}^*$ сопряжены в $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}_s}$. Но тогда будут сопряжены в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$. Подводя итог, видим, что для $\mathfrak{G}$ — вопреки предположению — теорема справедлива. Получилось опять противоречие, и теорема доказана.

3. Частными случаями доказанной теоремы являются (на основании, соответственно, (2), (3), (4) и (5)) теоремы Силова, Ф. Голла, С. А. Чунихина (теорема 9 работы (2)) и теорема II работы (3)).

Поступило
27 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ph. Hall, J. London Math. Soc., **3**, 98 (1928). [2] С. А. Чунихин, ДАН, **55**, № 6 (1947). [3] С. А. Чунихин, там же, **58**, № 7 (1947).