Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. С. ПИСКУНОВ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 XI 1947)

Рассмотрим уравнение ультрагиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Характеристическим конусом с вершиной в начале координат для этого уравнения будет конус

$$x^2+y^2-z^2-t^2=0. \tag{2}$$

Введем полярные координаты R, θ в плоскости xOy; r, ψ в плоскости zOt.

Уравнение характеристического конуса примет вид

$$R-r=0.$$

Решение уравнения (1) как функцию координат R, θ, r, ψ будем снова обозначать через u (в дальнейшем при переходе от одних переменных к другим мы не будем изменять название функции).

Теорема. *Пусть на поверхности характеристического конуса (2) задана функция $v(r, \theta, \psi)$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$v(r, \theta, \psi)$ представима в виде ряда Фурье*

$$v(r, \theta, \psi)=\sum_{m=0}^{\infty} P_m(r,\theta)\cos m\psi+Q_m(r,\theta)\sin m\psi. \tag{3}$$

2) *Коэффициенты $P_m(r,\theta)$ и $Q_m(r,\theta)$ также представимы в виде рядов Фурье*

$$P_m(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(m)}(r)\cos k\theta+\nu_k^{(m)}(r)\sin k\theta,$$

$$Q_m(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mu}_k^{(m)}(r)\cos k\theta+\bar{\nu}_k^{(m)}\sin k\theta. \tag{4}$$

3) *Коэффициенты $\mu_k^{(m)}(r), \nu_k^{(m)}(r), \bar{\mu}_k^{(m)}(r), \bar{\nu}_k^{(m)}(r)$ — аналитические функции по r, представленные в виде рядов вида*

$$\mu_k^{(m)}(r)=\sum_{(\lambda)} \alpha_\lambda^{(m)(k)}\, r^\lambda \tag{5}$$

$(\alpha_i^{(m)(k)}$ *удовлетворяют соотношениям, определяющим их рост в зависимости от* m, k *и* i, *эти соотношения будут указаны в процессе доказательства).*

Тогда существует решение уравнения (1) $u(R, \theta, r, \psi)$ *в области* $R < r$, *обращающееся на поверхности конуса в заданную функцию* $v(r, \theta, \psi)$, *т. е.*

$$u(r, \theta, r, \psi) = v(r, \theta, \psi).$$

Доказательство. Перепишем уравнение (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0$$

и будем искать решение в виде ряда Фурье

$$u(x, y, r, \theta) = \sum_{(m)} r^m [A_m(x, y, r)\cos m\psi + B_m(x, y, r)\sin m\psi], \tag{6}$$

где $A_m(x, y, r)$ должны удовлетворять следующему дифференциальному уравнению Дарбу

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A_m}{\partial r^2} + \frac{(2m+2)-1}{r}\frac{\partial A_m}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

и краевым условиям

$$A_m(x, y, r) = P_m(r, \theta) r^{-m} \text{ при } x^2 + y^2 = r^2. \tag{8}$$

Известно [1], что уравнению Дарбу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

удовлетворяет функция, выражающая среднее значение от дважды непрерывно дифференцируемой функции по поверхности n-мерной сферы

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_n} \sigma(x_1 + \beta_1 r, x_2 + \beta_2 r, \ldots, x_n + \beta_n r)\, d\omega_n,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — проекции вектора β, Ω_n — единичная сфера с элементом поверхности $d\omega_n$ и площадью поверхности ω_n.

При этом

$$w(x_1, \ldots, x_n, 0) = \sigma(x_1, \ldots, x_n), \quad \partial w/\partial r = 0.$$

На основании этого функция

$$A_m(x, y, r) = \frac{m}{\pi} r^{-2m} \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} f_m(x + x_1, y + y_1)(r^2 - x_1^2 - y_1^2)^{m-1} dx_1 dy_1,$$

или

$$A_m(R, \theta, r) = \frac{m}{\pi} r^{-2m} \int_0^{2\pi} \int_0^{R\cos\varphi_1 + \sqrt{R^2\cos^2\varphi_1 + (r^2 - R^2)}} f_m(\rho, \varphi_1 + \theta) \times$$

$$\times [r^2 - \rho^2 - R^2 + 2\rho R\cos\varphi_1]^{m-1} \rho\, d\rho\, d\varphi_1$$

является решением уравнения (7), если $f_m(x, y)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция.

$f_m(\rho, \theta)$ нужно подобрать так, чтобы удовлетворялись краевые условия (8)

$$P_m(r, \theta) = \frac{m}{\pi} r^{-m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2r\cos\varphi} f_m(R, \varphi+\theta)\,[-R^2+2Rr\cos\varphi]^{m-1} R\,dR\,d\varphi.$$

Ищем $f_m(R, \theta)$ в виде ряда Фурье

$$f_m(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)}(R)\cos k\theta + D_k^{(m)}(R)\sin k\theta. \tag{9}$$

Для определения коэффициентов $C_k^{(m)}$ и $D_k^{(m)}$ получаем уравнения

$$\mu_k^{(m)}(r) = \frac{m}{\pi} r^{-m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2r\cos\varphi} C_k^{(m)}(R)\cos k\varphi\,[-R^2+2Rr\cos\varphi]^{m-1} R\,dR\,d\varphi.$$

Если положить

$$C_k^{(m)}(R) = \sum_{(\lambda)} \beta_\lambda^{(m)(k)} R^\lambda, \tag{10}$$

то

$$\beta_\lambda^{(m)(k)} = \frac{\pi}{m} \frac{\alpha_{\lambda+m}^{(m)(k)}}{2^{\lambda+2m} I_\lambda^{(m)} J_\lambda^{(m)(k)}},$$

где

$$I_\lambda^{(m)} = \frac{(m-1)!\,(\lambda+m)!}{(\lambda+2m)!},$$

$$J_\lambda^{(m)(k)} = \frac{\pi}{2^{\lambda+2m}} \frac{\Gamma(\lambda+2m+1)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2m+k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+2m-k}{2}+1\right)}.$$

Ряд (10) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (5).

При соответствующих $\alpha_\lambda^{(m)(k)}$ f_m будет дважды непрерывно дифференцируемой функцией и ряд (6) будет сходиться, допускать двукратное почленное дифференцирование, а следовательно, давать решение поставленной задачи.

В частности, это будет иметь место, если при $m=1$ двойной ряд (9) и ряды, полученные после двукратного дифференцирования, сходятся абсолютно, выполняются соотношения

$$\left| \frac{\alpha_{\lambda+m}^{(m)(k)}}{\frac{m}{\pi} 2^{\lambda+2m} I_\lambda^m J_\lambda^{(m)(k)}} \right| \leqslant \left| \frac{\alpha_{\lambda+1}^{(1)(k)}}{\frac{1}{\pi} 2^{\lambda+2} I_\lambda^{(1)} J_\lambda^{(1)(k)}} \right| F(m)$$

и ряд $\sum m^2 r^m F(m)$ сходится.

Теорема единственности. *Если существует решение и уравнения* (1), *принимающее на поверхности конуса*

$$x^2+y^2-z^2-t^2=0 \quad \textit{при} \quad z^2+t^2 \leqslant B^2$$

заданные значения и если оно представимо в виде ряда

$$u(x, y, r, \psi) = \sum_{(m)} r^m [A_m(x, y, r) \cos m\psi + B_m(x, y, r) \sin m\psi],$$

допускающего двукратное почленное дифференцирование по всем аргументам (при этом предполагается, что $A_m(x, y, r)$ непрерывны и имеют непрерывные производные до 2-го порядка при $R \leqslant r$), то это решение единственно.

Далее строится пример, где показывается, что если A_m разрывны, то решение не единственно.

Поступило
18 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, II, 1945.