Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 XI 1947)

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$A\varphi = a(z)\varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + T\varphi = f(z). \tag{1}$$

Здесь L — гладкий замкнутый контур в комплексной ζ-плоскости, имеющий ограниченную кривизну; z — точка на L; T — оператор, вполне непрерывный в том функциональном пространстве, которому принадлежит искомая функция $\varphi(z)$*. Расходящийся интеграл в (1) берется в смысле его главного значения по Коши. Наконец, мы примем, что $a^2(z) + b^2(z)$ везде отлично от нуля на L.

F. Noether (1) рассмотрел частный случай уравнения (1), когда контур L — одна замкнутая кривая**. Несколько меняя обозначения, можно тогда представить уравнение (1) в виде

$$a(s)\varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\, dt + T_1\varphi = f(s). \tag{2}$$

Относительно уравнения (2) F. Noether сформулировал следующие теоремы:

Теорема 1. *Уравнение* (2) *разрешимо тогда и только тогда, когда $f(s)$ ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения.*

Теорема 2. *Разность между числами решения*** *однородного уравнения* (2) *и однородного сопряженного с ним не зависит от вполне непрерывного оператора $T_1\varphi$ и равна*

$$m = \frac{1}{\pi}\int_L d\arg(a - ib). \tag{3}$$

Коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$ F. Noether считал действительными и непрерывными. Из хода его рассуждений можно заключить, что иско-

---

* Ниже мы везде будем обозначать буквой T с теми или иными индексами только вполне непрерывные операторы.

** Случай F. Noether'а соответствует предположению, что L — окружность, но к этому легко сводится общий случай односвязного достаточно гладкого замкнутого контура.

*** Говоря о числе решений, мы имеем в виду решения линейно независимые.

мую $\varphi(s)$ он также считал непрерывной. Однако в этих предположениях доказательства F. Noether'а неубедительны. Его доказательство теоремы 1 делается строгим, если допустить, что $a(s)$, $b(s)$ и $\varphi(s)$ — действительные или комплексные функции, удовлетворяющие условию Липшитца с положительным показателем. В этих же предположениях теорема 2 F. Noether'а доказана В. Д. Купрадзе (2). Далее, Б. В. Хведелидзе * распространил теоремы 1 и 2 на случай контура, состоящего из нескольких замкнутых кривых. Для комплексных функций $a(z)$ и $b(z)$ определение „индекса" m необходимо изменить; в этом случае

$$m = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L d \arg \frac{a - ib}{a + ib} \quad ^{**} . \tag{4}$$

Для систем уравнений типа (1) теоремы, аналогичные теоремам F. Noether'а содержится в работах G. Giraud (8) и Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (9). Последним принадлежит обобщение понятия индекса на системы сингулярных уравнений типа (1).

В настоящей заметке мы докажем теоремы 1 и 2 F. Noether'а для уравнения (1) при следующих предположениях: a) искомая функция $\varphi(z)$ квадратично-суммируема, b) $a(z)$ и $b(z)$ непрерывны. Кроме того, мы сохранеяем указанное выше условие c) $a^2(z) + b^2(z) \neq 0$, $z \in L$. При соответствующим образом измененных условиях a) — c) наши рассуждения, а с ними и конечный результат сохраняют силу и для систем сингулярных уравнений.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство L_2 функций, квадратично-суммируемых вдоль L; норму в L_2 определим формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_L |\varphi^2(z)|\, ds, \qquad ds = |dz|.$$

Лемма 1. *Оператор*

$$q\varphi = \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{5}$$

ограничен в L_2.

Справедливость этой леммы легко установить, исходя из того, что оператор

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t - s}{2}\, dt$$

ограничен в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ функций, квадратично-суммируемых на отрезке $(-\pi, \pi)$ ***.

Лемма 2. *Если $c(z)$ — функция, непрерывная на L, то оператор*

$$Q_c \varphi = q(c\varphi) - c(z)\, q\varphi = \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{c(\zeta) - c(z)}{\zeta - z}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \tag{6}$$

вполне непрерывен.

Лемма очевидна, если $c(z) \in Lip\, \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Если $c(z)$ непрерывна, то она есть предел равномерно сходящейся последовательности $c_j(z) \in Lip\, \alpha_j$.

---

* См. например (?).
** Эта форма индекса содержится в нашей заметке (4).
*** См. например (10), стр. 149.

Имеем теперь

$$\|Q_c\varphi - Q_{c_j}\varphi\| \leqslant \|q[(c-c_j)\varphi]\| + \|(c-c_j)q\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|q\|\cdot\|\varphi\| \max_{z\in L}|c(z)-c_j(z)|.$$

Отсюда $\|Q_c - Q_{c_j}\| \leqslant 2\|q\| \max\limits_{z\in L}|c(z)-c_j(x)| \to 0.$

Оператор Q_c есть предел последовательности вполне непрерывных операторов Q_{c_j}, сходящихся по норме, и, следовательно, вполне непрерывен.

Оператор M называется регуляризирующим данный оператор N, если $MN\varphi = \varphi + T'\varphi$. Нетрудно видеть, что оператор

$$M\psi = \frac{a(z)}{a^2(z)+b^2(z)}\psi(z) - \frac{b(z)}{\pi[a^2(z)+b^2(z)]}q\psi$$

регуляризирует оператор A (уравнение (1)). Это вытекает из леммы 2 и из известной формулы Пуанкаре — Бертрана, которая в наших обозначениях имеет вид $q^2\varphi \equiv -\varphi(z)$. В силу леммы 1 оператор M — ограниченный. Теперь из теоремы, доказанной в заметке ([5]), вытекает справедливость теоремы 1 в наших предположениях.

Обратимся к теореме 2. Построим функции $a_1(z)$, $b_1(z)$, удовлетворяющие условию Липшица и настолько близкие к $a(z)$ и $b(z)$ соответственно, чтобы $a_1^2(z)+b_1^2(z)$ и $a(z)a_1(z)+b(z)b_1(z)$ не обращались в нуль на L и чтобы

$$\|q\| \max_{z\in L}|a(z)b_1(z) - a_1(z)b(z)| < {}^1/_2 \min_{z\in L}|a(z)a_1(z)+b(z)b_1(z)|. \qquad (7)$$

Положим в (1) $f(z)\equiv 0$ и к обеим частям полученного таким образом однородного уравнения

$$A\varphi = a(z)\varphi(z) + b(z)q\varphi + T\varphi = 0 \qquad (8)$$

применим оператор

$$B\psi = a_1(z)\psi(z) - b_1(z)q\psi.$$

Мы получим тогда уравнение

$$BA\varphi = [a(z)a_1(z)+b(z)b_1(z)]\varphi(z) +$$
$$+ [a_1(z)b(z) - a(z)b_1(z)]q\varphi + T_2\varphi = 0. \qquad (9)$$

Опираясь на неравенство (7), легко доказать, что уравнение (9) и сопряженное с ним имеют одинаковое число решений. Найдем это число.

Условимся сопряженный оператор обозначать звездочкой. Обозначим соответственно через n, n^*, p, p^* числа решений уравнений $A\varphi=0$, $A^*\psi=0$, $B\chi=0$, $B^*\omega=0$. Пусть χ_k, $k=1,2,\ldots,p$, — решения уравнения $B\chi=0$.

Если $BA\varphi=0$, то

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{p} a_k\chi_k, \qquad (10)$$

где a_k — постоянные. В силу теоремы 1 уравнение (10) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{p} a_k (\chi_k, \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots n^*, \tag{11}$$

где ψ_j — решения уравнения $A^* \psi = 0$. Пусть ранг матрицы системы (11) равен s. При этом независимых коэффициентов a_k будет $p - s$ и очевидно, что уравнение (10) имеет $r = n + p - s$ решений. Если исходить из уравнения, сопряженного с (9), то мы точно так же найдем $r = n^* + p^* - s$. Сравнение обоих значений r дает

$$n - n^* = p^* - p. \tag{12}$$

Формула (4) показывает, что индекс есть непрерывный функционал от $a(z)$ и $b(z)$, если последние непрерывны и $a^2(z) + b^2(z) \neq 0$. Но индекс — число целое. Отсюда следует, что он не меняется при достаточно малом изменении $a(z)$ и $b(z)$; в частности, индексы операторов B и B^* равны $-m$ и m соответственно. Далее, к уравнениям $B\chi = 0$ и $B^* \omega = 0$ теорема 2 применима, так как $a_1(z)$ и $b_1(z)$ удовлетворяют условию Липшица. Таким образом, $p^* - p = m$; в силу (12) $n - n^* = m$, что и требовалось доказать.

В заключение скажем несколько слов об уравнениях, содержащих многомерные сингулярные интегралы. Лемма 2 остается в силе, если под q понимать многомерный сингулярный оператор. Можно доказать, что все теоремы заметки ([6]) верны и тогда, когда коэффициенты разложения сингулярного оператора по основным унитарным операторам ([7]) только непрерывны.

Ленинградский государственный университет

Поступило 12 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Noether, Math. Ann., **82**, 42 (1921). [2] В. Д. Купрадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, **2**, № 3, 227 (1941). [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [4] С. Г. Михлин, ДАН, **24**, № 4 (1939). [5] С. Г. Михлин, ДАН, **57**, № 1 (1947). [6] С. Г. Михлин, ДАН, **54**, № 9 (1946). [7] С. Г. Михлин, ДАН, **19**, № 5 (1938). [8] G. Giraud, Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup., sér. 3, **56**, 119 (1939). [9] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. мат. ин-та, **12**, в. 1 (1943). [10] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, пер. с англ., 1939.