Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. С. МЕЙЛИХЗОН

ПО ПОВОДУ МОНОГЕННОСТИ КВАТЕРНИОНОВ

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 27 X 1947)

В статье „О кватернионах Роана Гамильтона и понятии моногенности“ (1) акад. Н. М. Крылов занимается кватернионными функциями кватернионного переменного и устанавливает условия моногенности (в смысле Римана — Коши) такой функции.

В настоящей статье ставится вопрос о конкретном получении моногенных функций кватернионов.

Прежде всего следует заметить, что, ввиду неперестановочности умножения кватернионов и вытекающего отсюда двоякого определения частного двух кватернионов, производная кватернионной функции, связанная с вычислением отношения двух кватернионных приращений, также может быть определена двояко.

Называем, как обычно, правым частным кватернионов A и B кватернион $AB^{-1} = \frac{AB_c}{M^2(B)}$, а левым их частным кватернион $B^{-1}A = \frac{B_cA}{M^2(B)}$, где B_c — кватернион, сопряженный с B, а $M(B)$ — модуль кватерниона B. Тогда мы приходим, естественно, к определению двух, вообще говоря, не совпадающих, производных кватернионной функции кватернионного аргумента, которые можно было бы назвать производной „d“ (droite) и производной „g“ (gauche).

Будем следовать обозначениям цитированной статьи акад. Н. М. Крылова, принимая, стало быть, за аргумент кватернион:

$$r = t + ix + jy + kz, \tag{1}$$

а за функцию кватернион:

$$v = f(r) = \varphi + i\psi + j\mu + k\eta, \tag{2}$$

где t, x, y, z — вещественные независимые переменные, а φ, ψ, μ, η — вещественные функции этих переменных. Тогда, обозначая через $f'^{(d)}(r)$ и $f'^{(g)}(r)$ производные функции $v = f(r)$ в двух указанных выше смыслах, имеем, очевидно:

$$v_r'^{(d)} = f'^{(d)}(r) = \lim_{\Delta r \to 0} [\Delta f(\Delta r)^{-1}], \quad v_r'^{(g)} = f'^{(g)}(r) = \lim_{\Delta r \to 0} [(\Delta r)^{-1}\Delta f], \tag{3}$$

если эти пределы существуют.

Таким образом, в отношении кватернионной функции кватернионного аргумента можно говорить о моногенности в двух смыслах: моногенности d, когда предел $f'^{(d)}(r)$ существует независимо от способа стремления Δr к нулю, и моногенности g, когда это имеет место для $f'^{(g)}(r)$.

Нетрудно видеть, что в цитируемой статье акад. Н. М. Крылова формулами (6) были даны в сжатой форме условия моногенности g, а именно:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i\,\frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = j\,\frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = k\,\frac{\partial v}{\partial t}\,, \tag{4}$$

между тем как условия моногенности d запишутся:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}\,i,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t}\,j,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t}\,k. \tag{5}$$

В развернутом виде получим условия моногенности кватернионов, если в (4) и (5) заменим v его выражением (2), учтем известную таблицу умножения символов i, j, k, принятую при умножении кватернионов, стоящих слева и справа в указанных соотношениях. Тогда найдутся следующие две системы уравнений в частных производных, аналогичные для рассматриваемого случая уравнениям Коши—Римана.

1. Условия моногенности d:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} = -\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z}\,,\\
&\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{\partial\mu}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\mu}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

2. Условия моногенности g:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,\\
&\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Легко констатировать, что между условиями (6) и (7) не существует полного совпадения, так что моногенность d и моногенность g, вообще говоря, не имеют места для одной и той же функции.

Естественно поставить вопрос о разыскании конкретных кватернионных функций, имеющих свойство моногенности d или g, что требует нахождения четырех вещественных функций четырех вещественных переменных, удовлетворяющих условиям (6) или (7).

Решение вопроса получается легко, если предположить, что функции φ, ψ, μ, η имеют все частные производные второго порядка.

В этом предположении легко вывести, после некоторых выкладок, как из уравнений (6), с одной стороны, так и из уравнений (7), с другой, соотношение:

$$\partial^2 F/\partial u^2 = 0, \tag{8}$$

где через F обозначена какая-либо из функций φ, ψ, μ, η, а через u — какой-либо из аргументов t, x, y, z, так что (8) заключает в сжатой форме 16 соотношений.

Соотношения (8) показывают, что если кватернионная функция моногенна d или g, то каждая из функций φ, ψ, μ, η линейна относительно каждого из аргументов t, x, y, z, откуда легко вытекает, что каждая из этих функций должна иметь форму:

$$F_n = N_n + A_n t + B_n x + C_n y + D_n z + a_n xy + b_n xz + c_n yz + d_n xt + \\ + e_n yt + f_n zt + p_n xyz + q_n xzt + r_n xyt + s_n yzt + M_n xyzt, \quad (9)$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где

$$F_1 = \varphi, \quad F_2 = \psi, \quad F_3 = \mu, \quad F_4 = \eta, \quad (10)$$

N_n, A_n, B_n, C_n и т. д. — неопределенные вещественные и постоянные коэффициенты.

Если подставить в соотношения (6), а затем (7) выражения φ, ψ, μ, η по формулам (9) и (10) и учесть, что получающиеся равенства должны иметь место тождественно, т. е. при любых значениях t, x, y, z некоторой области, то после элементарных выкладок найдем

$$a_n = b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = p_n = q_n = r_n = s_n = M_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad (11)$$

равенства, которые должны иметь место как при моногенности d, так и при моногенности g.

Что касается коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, то для моногенности d найдем условия:

$$A_4 = B_2 = C_3 = D_4, \quad A_2 = -B_1 = C_4 = -D_3, \quad A_3 = -B_4 = -C_1 = D_2, \\ A_4 = B_3 = -C_2 = -D_1, \quad (12)$$

а для моногенности g найдется:

$$A_1 = B_2 = C_3 = D_4, \quad A_2 = -B_1 = -C_4 = D_3, \quad A_3 = B_4 = -C_1 = -D_2, \\ A_4 = -B_3 = C_2 = -D_1. \quad (13)$$

Наконец, вещественные коэффициенты N_n не подчинены никакому ограничению.

Если положим теперь

$$A_1 = a, \quad A_2 = b, \quad A_3 = c, \quad A_4 = d, \quad (14)$$

то, используя условия (11), (12), (13), найдем по формулам (9), (10) общее выражение для вещественных функций φ, ψ, μ, η, а подставляя эти выражения в (2), получим общий вид кватерниона, моногенного d, в форме:

$$v = f(r) = at - bx - cy - dz + i(bt + ax - dy + cz) + j(ct + dx + \\ + ay - bz) + k(dt - cx + by + az) + N_1 + iN_2 + jN_3 + kN_4. \quad (15)$$

Для функции, моногенной g, найдется форма:

$$v = f(r) = at - bx - cy - dz + i(bt + ax + dy - cz) + j(ct - dx + ay + \\ + bz) + k(dt + cx - by + az) + N_1 + iN_2 + jN_3 + kN_4. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, используя правила умножения и сложения кватернионов, что, учитывая (1) и полагая

$$a + ib + jc + kd = Q, \quad N_1 + iN_2 + jN_3 + kN_4 = N,$$

можно записать выражения (15), (16):

$$v = Qr + N, \quad (17)$$

$$v = rQ + N, \quad (18)$$

где Q и N — призвольные постоянные кватернионы, r — кватернионный аргумент, а Qr и rQ означают кватернионные произведения.

Легко проверить, что переменный кватернион (17) действительно имеет определенную производную d, не зависящую от способа стремления Δr к нулю и равную Q, а функция (18) имеет определенную производную g, также равную Q.

Так как (17) и (18) представляют линейные кватернионные функции аргумента r, то из всего сказанного выше получается теорема:

Всякая кватернионная функция кватернионного аргумента r, моногенная d в некоторой области, сводится в этой области к линейной функции $Qr + N$; всякая функция, моногенная g, сводится к линейной функции $rQ + N$, где Q и N — постоянные кватернионы.

Этот результат показывает, что даже такая простая функция кватернионного аргумента, как, например, r^2, не моногенна. Причина этого несколько неожиданного факта кроется, как легко понять, опять-таки в некоммутативности умножения кватернионов, вследствие чего $\Delta(r^2) \neq 2r\,\Delta r + (\Delta r)^2$; в случае коммутативности умножения мы имели бы равенство.

Для кватернионной функции r^2 приращение вычислится по формуле

$$\Delta(r^2) = r\,\Delta r + \Delta r\, r + (\Delta r)^2 \tag{19}$$

и при Δr, стремящемся к нулю, ни одно из выражений $\Delta(r^2)(\Delta r)^{-1}$, $(\Delta r)^{-1}(\Delta r^2)$ не имеет предела.

Наконец, можно было бы поставить вопрос о существовании кватернионной функции двояко моногенной, т. е. моногенной как d, так и g.

Приравнивая между собой выражения (17) и (18), в которых дадим коэффициентам различные значения Q, Q_1, N, N_1, найдем легко:

$$N = N_1, \quad Q_1 = Q = a,$$

где a — вещественное число.

Отсюда теорема:

Всякая двояко моногенная в данной области кватернионная функция кватернионного аргумента сводится в этой области к линейной функции $ar + N$, где a — постоянное вещественное число, а N — постоянный кватернион.

Поступило
27 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Крылов, ДАН, 55, № 9 (1947).