Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

П. КАЛАФАТИ

О ФУНКЦИЯХ ГРИНА ОБЫКНОВЕННЫХ КВАЗИ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 X 1947)

Пусть дан квази-дифференциальный оператор

$$L(y) \equiv \rho_0 \frac{d}{dx} \rho_1 \frac{d}{dx} \dots \rho_{n-1} \frac{d}{dx} \rho_n y, \tag{1}$$

где $\rho_k(x) > 0$ $(a \leqslant x, \leqslant b;\ k=0, 1, 2, \dots, n)$, и граничные условия

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} D^{k-1} y(a) + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_{ik} D^{k-n-1} y(b) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

где $D^0 y = \rho_n y$ и $D^k y = \rho_{n-k} \frac{d}{dx} \rho_{n-k+1} D_y^{k-1}$ $(k=1, 2, \dots, n)$.

В предыдущей заметке ([1]) мы указали достаточные условия, которым должны удовлетворять детерминанты n-го порядка матрицы

$$A = \| \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}, \alpha_{in+1}, \dots, \alpha_{i2n} \|_{i=1}^{n} \tag{3}$$

для того, чтобы функция Грина $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$, удовлетворяющая уравнению $L(y)=0$ и граничным условиям (2), была обыкновенным, четным или нечетным ядром Келлога.

Матрицы, удовлетворяющие этим условиям, будем называть, соответственно, обыкновенными, четными или нечетными K-матрицами.

Пусть $\overline{D}^0 y = \rho_0 y$; $\overline{D}^k y = \rho_k \frac{d}{dx} \rho_{k-1} \overline{D}^{k-1} y$ $(k=1, 2, \dots, n)$.

Мы будем применять к функции $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ операцию „D^k“ по переменной x и „$\overline{D}^k$“ по переменной s и пользоваться следующими обозначениями:

$$D^k G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\Big|_{x=a} = G\begin{pmatrix} k+1 \\ s \end{pmatrix}; \quad D^k G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\Big|_{x=b} = G\begin{pmatrix} n+k+1 \\ s \end{pmatrix};$$

$$\overline{D}^k G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\Big|_{s=a} = G\begin{pmatrix} x \\ k+1 \end{pmatrix}; \quad \overline{D}^k G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\Big|_{s=b} = G\begin{pmatrix} x \\ n+k+1 \end{pmatrix},$$

$$k=0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть $K\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ — другая функция Грина оператора (1), удовлетворяющая граничным условиям с матрицей

$$S = \| A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i2n} \|_{i=1}^{n}. \tag{4}$$

Мы предполагаем, чго эти условия независимы. Тогда матрица (4) содержит хоть один детерминант n-го порядка, отличный от нуля. Выразим ядро $G\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ через $K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ и символы $G\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_m\\s_1s_2\ldots s_m\end{pmatrix}$ чере^3 $K\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_m\\s_1s_2\ldots s_m\end{pmatrix}$ $(m=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим для этого n систем уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{i1}K\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}+\alpha_{i2}K\begin{pmatrix}2\\s\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{i2n}K\begin{pmatrix}2n\\s\end{pmatrix}\equiv u_i(s),\\&A_{k1}K\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}-A_{k2}K\begin{pmatrix}2\\s\end{pmatrix}+\ldots+A_{k2n}K\begin{pmatrix}2n\\s\end{pmatrix}\equiv 0\\&\qquad\qquad k=1, 2, \ldots, n.\end{aligned}\right\} i=1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

Детерминанты n-го порядка матрицы (4) мы будем обозначать номерами входящих в их состав колонн. Пусть $(r_1, r_2, \ldots, r_n)\neq 0$. Тогда

$$u_i(s =\sum_{k=1}^{n} C_{iq_k}K\begin{pmatrix}q_k\\s\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$C_{iq_k}=\frac{(q_k, r_1, r_2, \ldots, r_n)_i}{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \tag{7}$$

и в числителе выражения (7) стоит детерминант $n+1$-го порядка „расширенной“ матрицы (4), т. е. матрицы, которая отличается от (4) тем, что дописана первая строка $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{i2n}$.

Пусть $K\begin{pmatrix}x\\p_1\end{pmatrix}, K\begin{pmatrix}x\\p_2\end{pmatrix}, \ldots, K\begin{pmatrix}x\\p_n\end{pmatrix}$ — n символов, не обращающихся тождественно в нуль на основании граничных условий, сопряженных условиям (2). Пусть эти символы линейно независимы. Пусть числа $j_1, j_2, \ldots, j_n$ обладают тем свойством, что $j_i+p_i=n-1$, если $p_i\leqslant n-1$, и $j_i+p_i=2n-1$, если $p_i>n-1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим матрицу

$$T=\| \alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, \ldots, \alpha_{ij_n}, C_{iq_1}, C_{iq_2}, \ldots, C_{iq_n}\|_{i=1}^{n}. \tag{8}$$

Перенумеруем ее колонны согласно расположению вгорых индексов. Пусть $\det| C_{iq_r}|_{i,\, r=1}^{n}=\beta$.

Детерминант, который получится, если в β мы заменим вертикали с номерами $q_{r_1}, q_{r_2}, \ldots, q_{r_k}$ вертикалями матрицы T с номерами $j_{s_1}, j_{s_2}, \ldots, j_{s_k}$ и расположим после этого колонны в том же порядке следования, как в матрице (8), обозначим через $[j_{s_1}, j_{s_2}, \ldots, j_{s_k} \mid q_{r_1}, q_{r_2}, \ldots, q_{r_k}]$. Свойства детерминантов этого типа были изложены нами в заметке (1).

После этого нетрудно доказать следующую формулу:

$$G\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left|\begin{array}{c|c}K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix} & K\begin{pmatrix}q_1\\s\end{pmatrix}\ldots K\begin{pmatrix}q_n\\s\end{pmatrix}\\ \hline K\begin{pmatrix}x\\p_1\end{pmatrix} & \\ \ldots & \Delta\\ K\begin{pmatrix}x\\p_n\end{pmatrix} & \end{array}\right|,$$

где $\Delta = \det \left| K\begin{pmatrix} q_r \\ p_k \end{pmatrix} + \gamma_{j_k}^{q_r} \right|^n$ и, кроме того,

$$\gamma_{j_s}^{q_r} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j_s+q_r+1}[j_s \mid q_r]}{\beta} & \text{при} \quad j_r \leqslant n, \\ \dfrac{(-1)^{j_s+q_r}[j_s \mid q_r]}{\beta} & \text{при} \quad j_r > n. \end{cases}$$

Эту формулу легко доказать, проверив, что функция $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $L(y)=0$, условиям (2) и условию разрыва. Она легко обобщается и на тот случай, когда граничные условия связывают не две точки, находящиеся на концах интервала, а произвольное число точек, из которых две лежат на концах, а остальные внутри интервала. При этом, если оператор $L(y)$ самосопряженный, то легко получить для граничных условий n-точечной задачи условия самосопряженности. Используя тождество Сильвестра и вычисляя детерминанты, составленные из чисел γ_r^q, легко дать формулу для символов Фредгольма ядра $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ и его резольвенты, подобную той, которую мы дали в предыдущей заметке, причем тем же предельным переходом можно охватить и случай, когда $\beta=0$.

В предыдущей заметке был использован тот частный случай формулы (9), когда в качестве вспомогательного ядра $K\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ взята функция Коши $V\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$.

Формула (9), помимо ряда результатов, относящихся к алгебре функций Грина, позволяет значительно расширить класс граничных условий, для которых функция Грина будет обыкновенным, четным или нечетным ядром Келлога.

Для этого остановимся на следующих частных случаях.

1. Ядро $K\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ удовлетворяет группе „простых" условий вида:

$$D^{k_1} y(a) = D^{k_2} y(a) = \ldots = D^{k_i} y(a) = D^{r_1} y(b) = \ldots = D^{r_j} y(b) = 0$$
$$(i + j = n).$$

В этом случае ядро $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ и символы $G\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m \\ s_1 \ldots s_m \end{pmatrix}$ $(m=1, 2, \ldots)$ выразятся через детерминанты n-го порядка матрицы (3) и через символы вида

$$K\begin{pmatrix} x, q_1, \ldots, q_\nu \\ s, p_1, \ldots, p_\nu \end{pmatrix} \text{ и } K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m, q_1, \ldots, q_\nu \\ s_1, \ldots, s_m, p_1, \ldots, p_\nu \end{pmatrix} \tag{10}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots),$$

где q_k и p_k — те числа, при которых выражения $K\begin{pmatrix} x \\ p_k \end{pmatrix}$ и $K\begin{pmatrix} q_k \\ s \end{pmatrix}$ не обращаются тождественно в нуль.

Легко видеть, что символы (10) не меняют знака при любых $a < x_1 < \ldots < x_m < b$ и $a < s_1 < \ldots < s_m < b$. Легко установить эти знаки, и если мы это проделаем и проведем необходимые вычисления, то получим тот же результат, что и в предыдущей заметке, а именно, что для того, чтобы функция Грина $G\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ была обыкновенным, четным или нечетным ядром Келлога, достаточно, чтобы матрица (3) была обыкновенной, четной или нечетной K-матрицей.

2. Пусть ядро $K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ удовлетворяет некоторым штурмовым условиям, позволяющим выразить величины $u_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ через линейную комбинацию тех же символов $K\begin{pmatrix}q_k\\s\end{pmatrix}$, что и в предыдущем случае. Выберем символы $K\begin{pmatrix}x\\p_k\end{pmatrix}$ опять-таки те же, что и в предыдущем случае. Заметим, что тогда в последовательности $j_1, \ldots, j_n$, $q_1, \ldots, q_n$ в матрице (8) содержатся все числа $1, 2, \ldots, 2n$.

Переставим теперь в матрице T колонны так, чтобы они были расположены в порядке возрастания номеров, и обозначим полученную матрицу через T_1. Легко видеть, что формулы для символов $G\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_m\\s_1 \ldots s_m\end{pmatrix}$ и $G\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_m\\s_1 \ldots s_m\end{pmatrix}\lambda$ будут иметь тот же вид, что и в предыдущем случае, с той разницей, что матрица A заменена на матрицу T_1, а ядро $K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ удовлетворяет не „простым", а штурмовым условиям более общего вида.

Теперь каждый символ вида (10), вообще говоря, не сохраняет знака при $a<x_1<\ldots<x_m<b$ и $a<s_1<\ldots<s_m<b$, но этот случай часто имеет место. Назовем в таком случае $K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ регулярным ядром Келлога по отношению к числам $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, а матрицу S — регулярной по отношению к этим числам.

Нетрудно показать, что ядро $K\begin{pmatrix}x\\s\end{pmatrix}$ может быть регулярным только тогда, когда символы (10) сохраняют те же знаки, что в случае „простых" условий.

Назовем операцию, посредством которой из матрицы A при помощи матрицы S получается матрица T_1, с о е д и н е н и е м матриц A и S относительно чисел $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ и обозначим ее знаком $*$:

$$T_1 = A * S(q_1 \ldots q_n\, p_1 \ldots p_n).$$

После этого можно сформулировать теорему:

Т е о р е м а. *Пусть дана дифференциальная система, состоящая из уравнения $L(y)=0$ и граничных условий (2) с матрицей A. Пусть матрица S регулярна по отношению к числам $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Тогда, если матрица $T_1 = A * S\ (q_1 \ldots q_n\, p_1 \ldots p_n)$ является обыкновенной, четной или нечетной K-матрицей, то функция Грина данной дифференциальной системы является обыкновенным, четным или нечетным ядром Келлога.*

Добавим, что если дано уравнение $L(y) - \lambda\rho y = 0$ $(\rho(x) > 0)$ и граничные условия (2), то для осцилляции фундаментальных функций этой системы достаточно, чтобы матрица S была регулярной хотя бы при одном значении параметра λ.

Приношу благодарность М. Г. Крейну и Б. Я. Левину за ряд указаний во время выполнения работы.

Поступило
14 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. К а л а ф а т и, ДАН, **26**, № 6 (1940).