Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

И. А. ИЦКОВИЧ

О РЯДАХ ФРЕДГОЛЬМА

(*Представлено академиком В. И. Смирновым 23 X 1947*)

T. Carleman [1] доказал следующую теорему:

Если ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{1}$$

квадратично суммируемо по обеим переменным, то ряды Фредгольма, отвечающие этому ядру, сходятся на всей конечной плоскости λ и их частное совпадает с резольвентой уравнения (1).

Иные доказательства теоремы T. Carleman'a дали Hille и Tamarkin [2] и С. Г. Михлин [3]. Промежуток (a, b) считается конечным.

В настоящей заметке мы докажем сходимость рядов Фредгольма при более общих условиях, наложенных на ядро.

1°. Будем считать, что искомая функция и правая часть в уравнении (1) принадлежат пространству L_p. На ядро наложены следующие условия:

$$\left\{\int_a^b dx\left(\int_a^b |K(x, s)|^q\,ds\right)^{p/q}\right\}^{1/p} = k' < \infty, \tag{2}$$

$$\left\{\int_a^b ds\left(\int_a^b |K(x, s)|^p\,dx\right)^{q/p}\right\}^{1/q} = k'' < \infty, \tag{3}$$

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Условие (2) является достаточным для того, чтоб оператор Фредгольма

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \tag{4}$$

был вполне непрерывным в пространстве L_p; это легко доказать с помощью неравенства Гельдера и необходимого и достаточного условия компактности в L_p. Норма оператора (4) не превышает k'.

Пусть $K_n(x, s)$ обозначает n-е итерированное ядро, A_n — его след, k'_n и k''_n — повторные интегралы, указанные в условиях (2) и (3) и взятые от $K_n(x, s)$.

Теорема 1. *Если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *то следы всех итерированных ядер, начиная со второго, конечны.*

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, мы докажем сперва, что $k''_n \leqslant k''_{n-1} k'$ $(n > 1)$. Отсюда легко найдем, что $k''_n \leqslant k'' (k')^{n-1}$.

Далее,

$$|K_n(s, s)| = \left| \int_a^b K(s, t) K_{n-1}(t, s)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |K(s, t)|^q\, dt \right)^{1/q} \left(\int_a^b |K_{n-1}(t, s)|^p\, dt \right)^{1/p};$$

отсюда

$$|A_n| = \left| \int_a^b K_n(s, s)\, ds \right| \leqslant k' k''_{n-1} \leqslant (k')^{n-1} k'' \quad (n > 1).$$

Мы всегда можем добиться того, чтобы $A_1 = \int_a^b K(s, s)\, ds$ было конечным, изменив, если это необходимо, значение ядра $K(x, s)$ на диагонали $x = s$.

2°. Множество функций $K(x, s)$, удовлетворяющих условию (2), мы можем рассматривать как линейное нормированное пространство $L_{p, q}$, если условимся нормой функции $K(x, s)$ считать повторный интеграл, указанный в условии (2):

$$\| K(x, s) \| = k'.$$

Нетрудно доказать, что пространство $L_{p, q}$ полное.

Теорема 2. *Если ядро $K(x, s) \in L_{p, q}$, то его можно разбить на сумму двух ядер, из которых одно вырожденное, а другое сколь угодно мало по норме.*

Доказательство. Построим сперва ограниченную функцию $K_N(x, s)$ таким образом:

$$K_N(x, s) = \begin{cases} K(x, s), & \text{если } |K(x, s)| \leqslant N, \\ 0, & \text{если } |K(x, s)| > N. \end{cases}$$

Можно выбрать N настолько большим, чтобы норма

$$\| K(x, s) - K_N(x, s) \|$$

была достаточно мала. Затем ограниченную измеримую функцию $K_N(x, s)$ можно апроксимировать в смысле метрики $L_{p, q}$ непрерывной функцией $f(x, s)$. Наконец, непрерывную функцию $f(x, s)$ можно апроксимировать полиномом $P(x, s) = \sum_{i, k=0}^{m} a_{ik} x^i s^k$ в смысле равномерной сходимости, значит тем более в смысле метрики $L_{p, q}$. Неравенство Минковского позволяет связать процессы апроксимации, чем и завершается доказательство.

3°. В ([3]) С. Г. Михлин применил для доказательства теоремы T. Carleman'a метод, основанный по существу только на трех фактах, которые следуют из квадратичной суммируемости ядра:

a) ядро можно разложить на сумму вырожденного и малого по норме;

b) следы всех итерированных ядер конечны;

c) пространство функций $K(x, s)$ с нормой, данной формулой

$$\|K(x, s)\| = \sqrt{\int_a^b |K(x, s)|^2 dx\, ds},$$

полное.

Рассматриваемые нами ядра можно, в силу условия (2), разложить на сумму вырожденного и малого по норме; в силу условий (2) и (3) все следы конечны, и, наконец, как мы указали, пространство $L_{p,q}$ полное.

Теперь мы можем утверждать справедливость следующей теоремы:

Теорема 3. *Если ядро интегрального уравнения* (1) *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *то ряды Фредгольма сходятся на всей конечной плоскости комплексного переменного* λ *и их частное есть резольвента интегрального уравнения* (1).

Поступило
23 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Math. Z., 9, 3/4 (1921). [2] Hille and Tamarkin, Acta Math., **57** (1931). [3] С. Г. Михлин, ДАН, **42**, № 9 (1944).