Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. Н. БАБКИН

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЮБОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ С. А. ЧАПЛЫГИНА О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 14 X 1947)

Метод последовательных приближений, как метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет следующие трудно преодолимые в общем случае дефекты: 1) метод этот имеет локальный характер; 2) погрешность приближений трудно поддается оценке; 3) применение его к приближенному решению уравнений высших порядков в силу сложности доказательства сходимости приближений к искомому решению вообще затруднительно.

Тем не менее, для одного частного класса уравнений, рассматриваемого в настоящей работе, все эти дефекты легко устранить на основе оригинальной идеи С. А. Чаплыгина [1] о заключении искомого решения в „вилку“ и постоянного сжимания этой „вилки“. Принципиальной основой такого синтеза идей Picard'а и С. А. Чаплыгина является теорема С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Затруднения, связанные с применением теоремы С. А. Чаплыгина к уравнениям высших порядков, иллюстрированные в работе Б. Н. Петрова [2, 3], для рассматриваемого класса уравнений, как это показано в нашей работе, не имеют места.

Введем предварительно некоторые определения.

Пусть дано уравнение

$$dy/dx = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с $\partial f/\partial y$ в некоторой области D, содержащей точку $M(x_0, y_0)$. Обозначим решение уравнения (1), обращающееся в y_0 при $x=x_0$, через $y=y(x)$. Функцию $y=v(x)$, удовлетворяющую на некотором интервале (x_0, x_1) неравенству $v(x)>y(x)$ и условию $v(x_0)=y_0$, назовем верхней функцией; функцию $y=u(x)$, удовлетворяющую противоположному неравенству $u(x)<y(x)$ и условию $u(x_0)=y_0$, назовем нижней.

Мы покажем, что, исходя из пары таких функций $v(x)$ и $u(x)$ (удовлетворяющих дополнительно дифференциальным неравенствам Чаплыгина), двойным применением метода последовательных приближений можно построить две последовательности функций:

$$\begin{gathered} v(x)>v_1(x)>\ldots>v_n(x)>\ldots>y(x), \\ u(x)<u_1(x)<\ldots<u_n(x)<\ldots<y(x), \end{gathered} \tag{2}$$

апроксимирующих искомое решение $y(x)$ сверху и снизу с любой степенью точности. Аналогичные последовательности мы построим и для апроксимации решения уравнения n-го порядка.

§ 1. Уравнения 1-го порядка. Пусть $y=v(x)$ и $y=u(x)$ — функции, удовлетворяющие следующим неравенствам

$$\frac{dv}{dx}-f(x,v)>0, \quad \frac{du}{dx}-f(x,u)<0 \tag{3}$$

на интервале (x_0, x_1), причем $v(x_0)=u(x_0)=y_0$. Кроме того, будем предполагать, что $\partial f/\partial y>0$ в области D, ограниченной кривыми $y=v(x)$, $y=u(x)$ и прямыми $x=x_0$, $x=x_1$. Функции $v(x)$ и $u(x)$ в силу теоремы о дифференциальных неравенствах будут, соответственно, верхней и нижней функциями.

Следующую пару приближений к искомому решению уравнения (1) построим по формулам:

$$v_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,v)\,dx, \quad u_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,u)\,dx. \tag{4}$$

Покажем, что $v_1(x)$ будет верхней функцией, а $u_1(x)$ — нижней, причем на интервале (x_0, x_1) будут иметь место неравенства:

$$u(x)<u_1(x)<y(x)<v_1(x)<v(x). \tag{5}$$

Рассмотрим для этого разность

$$v(x)-v_1(x)=v(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(x,v)\,dx=\int_{x_0}^{x}[v'(x)-f(x,v)]\,dx>0.$$

Тогда $dv_1/dx-f(x,v_1)=f(x,v)-f(x,v_1)$ будет также больше нуля. Аналогично имеем $du_1/dx-f(x,u_1)=f(x,u)-f(x,u_1)<0$.

Таким образом мы получили новую пару приближений $v_1(x)$, $u_1(x)$, более тесно охватывающую искомое решение, чем функции $v(x)$, $u(x)$. Продолжая этот процесс с помощью формул

$$v_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,v_{n-1})\,dx, \quad u_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,u_{n-1})\,dx, \tag{6}$$

получим последовательности функций (2), апроксимирующие искомое решение сверху и снизу.

Покажем, наконец, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=y(x)$ или, что то же, $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n(x)-u_n(x))=0$. Обозначим $\max[v(x)-u(x)]$ на (x_0, x) через δ_0 и $\max(\partial f/\partial y)$ в области D через N.

Рассмотрим теперь разности

$$v_n(x)-u_n(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,v_{n-1})-f(x,u_{n-1})]\,dx<\delta_0 N^n\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Последние неравенства показывают, что $\lim\limits_{n\to\infty}[v_n(x)-u_n(x)]=0$ на (x_0, x_1), что и требовалось доказать.

§ 2. Уравнения 2-го и высших порядков. Пусть дано уравнение

$$y''=f(x,y,y'), \tag{7}$$

где $f(x, y, y')$ есть функция, непрерывная вместе с $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial y'$ в некоторой области D, содержащей точку $M(x_0, y_0)$, кроме того в области D для всех y' из некоторого конечного интервала (A, B) $\partial f/\partial y > 0$ и $\partial f/\partial y' > 0$. Решение уравнения (7) при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ обозначим через $y = y(x)$.

Пусть функции $y = v(x)$ и $y = u(x)$ на интервале $(x_0, x) \subset D$ удовлетворяют, соответственно, неравенствам

$$v'' - f(x, v, v') > 0, \quad u'' - f(x, u, u') < 0 \tag{8}$$

и, кроме того, $v(x_0) = u(x_0) = y_0$, $v'(x_0) = u'(x_0) = y_0'$. Обозначим $\max v'(x)$ на (x_0, x_1) через B, а $\min u'(x)$ — через A. Покажем, что условия (8) влекут за собой неравенства $v(x) > y(x)$, $u(x) < y(x)$ на интервале (x_0, x_1),

Действительно, в силу (8) и тождества $y''(x) - f[x, y(x), y'(x)] = 0$ на некотором достаточно малом интервале $(x_0, \alpha) \subset (x_0, x_1)$ будем иметь $v(x) > y(x)$ и $v'(x) > y'(x)$. Теперь покажем, что ни в одной точке интервала (x_0, x_1) не может иметь место неравенство $v'(x) \leqslant y'(x)$.

Допустим противное; пусть β — первая из точек интервала (α, x_1), где $v'(\beta) = y'(\beta)$, и, следовательно, на интервале (α, β) $v'(x) > y'(x)$. Проинтегрируем соотношения $v''(x) - f(x, v, v') > 0$ и $y''(x) - f(x, y, y') = 0$ в пределах от x_0 до β:

$$\int_{x_0}^{\beta} [v'' - f(x, v, v')]\, dx > 0, \quad \int_{x_0}^{\beta} [y'' - f(x, y, y')]\, dx = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} v'(\beta) - v'(x_0) - \int_{x_0}^{\beta} f(x, v, v')\, dx > 0, \\ y'(\beta) - y'(x_0) - \int_{x_0}^{\beta} f(x, y, y')\, dx = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вычитая второе равенство из первого неравенства, получим

$$v'(\beta) - y'(\beta) = \int_{x_0}^{\beta} [f(x, y, y') - f(x, v, v')]\, dx > 0. \tag{10}$$

Но неравенство (10) невозможно в силу условий $\partial f/\partial y > 0$, $\partial f/\partial y' > 0$, так как левая часть при этих условиях отрицательна. Полученное противоречие и доказывает неравенство $v'(x) > y'(x)$.

Таким образом, мы доказали, что на всем интервале (x_0, x_1) $v'(x) > y'(x)$ и, следовательно, $v(x) > y(x)$. Аналогично доказывается неравенство $u(x) < y(x)$.

Переходим к построению последовательности верхних и нижних функций, апроксимирующих искомое решение. Обозначим через $r(x)$ разность $v''(x) - f(x, v, v') > 0$. Построим функцию

$$v_1(x) = v(x) - \int_{x_0}^{x} (x - t)\, r(t)\, dt. \tag{11}$$

Покажем, что $v_1(x)$ есть верхняя функция, причем $v_1(x) < v(x)$.

Последнее неравенство очевидно, так как $\int_{x_0}^{x} (x - t)\, r(t)\, dt > 0$.

Нетрудно видеть, что $v'(x) - v_1'(x) = \int\limits_{x_0}^{x} r(t)\,dt > 0$.

Рассмотрим разность $v_1''(x) - f(x, v_1, v_1') = f(x, v, v') - f(x, v_1, v_1')$. Последняя разность в силу условий $\partial f/\partial y > 0$ и $\partial f/\partial y' > 0$ будет больше нуля, т. е., действительно, функция $y = v_1(x)$ будет верхней.

Аналогично можно показать, что $u_1(x) > u(x)$.

Дальнейшие построения продолжаем по формулам:

$$\left.\begin{aligned} v_n(x) &= v_{n-1}(x) - \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)\, r_{n-1}(t)\,dt, \\ u_n(x) &= u_{n-1}(x) - \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)\, s_{n-1}(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $r_{n-1}(t) = v_{n-1}''(t) - f(t, v_{n-1}, v_{n-1}') > 0$, $s_{n-1}(t) = u_{n-1}''(t) - f(t, u_{n-1}, u_{n-1}') < 0$.

Легко видеть, что построенные приближения будут удовлетворять неравенствам (2).

Введем следующие обозначения:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} (v - u) = \delta_0, \quad \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} (v' - u') = \delta_0',$$

$$\max \frac{\partial f}{\partial y} = N_1, \quad \max \frac{\partial f}{\partial y'} = N_2$$

в рассматриваемой ограниченной области.

Тогда будем иметь

$$v_1(x) - u_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)\,[f(t, v, v') - f(t, u, u')]\,dt <$$
$$< \delta_0 N_1 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \delta_0' N_2 \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$v_2(x) - u_2(x) < \delta_0 N_1^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \delta_0' N_2^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!}.$$

Методом полной индукции нетрудно убедиться, что при любом n будем иметь

$$v_n(x) - u_n(x) < \delta_0 N_1 \frac{n\,(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_0' N_2^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} [v_n(x) - u_n(x)] = 0$ для всех x из интервала (x_0, x_1).

Рассмотренный метод легко обобщается на уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

при условии, если $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y', \ldots, \partial f/\partial y^{(n-1)} > 0$.

Поступило
14 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Тр. ЦАГИ, № 130 (1932). [2] Б. Н. Петров, ДАН, 51, № 4 (1946). [3] Б. Н. Петров, ДАН, 51, № 7 (1946).