Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

О. В. ГОЛУБЕВА

ОБ УПРОЩЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОКЕАНАХ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 19 V 1948)

Изучение поверхностных течений океанов приводит к интеграции уравнений Навье — Стокса. Ввиду сложности этой задачи представляет интерес найти такие упрощенные уравнения гидродинамики, отвечающие задаче о поверхностных течениях, которые бы достаточно просто интегрировались. Отысканию указанных упрощенных уравнений посвящается настоящая заметка.

I. Рассмотрим общие уравнения движения жидкости в сферической системе координат, неизменно связанной с вращающейся землей.

Примем следующие упрощающие задачу положения:

1. Ограничимся рассмотрением только дрейфовых течений. На основании многочисленных наблюдений надо считать основной причиной существования поверхностных течений океанов систему постоянно дующих ветров, следовательно, течениями, возникающими в результате изменения плотности воды, можно пренебречь и рассматривать воду как жидкость несжимаемую.

2. Отбрасываем в уравнениях силы инерции переносного движения как силы, не вызывающие движения. Эти силы определяют сфероидальную форму Земли. Однако разность между наибольшим и наименьшим радиусами Земли составляет всего 0,34% от среднего земного радиуса, поэтому с достаточной степенью точности можно рассматривать Землю как сферу.

3. Волны на поверхности движущихся масс не учитываем. Давление в движущемся слое считаем меняющимся от точки к точке.

4. Считаем, что нет вертикального перемешивания слоев. Это предположение можно сделать, рассматривая карты поверхностных течений, где поверхностные течения представляют собой ярко выраженные замкнутые круговороты вод.

5. Из рассмотрения карт течений также следует, что течения Тихого, Атлантического и южной части Индийского океанов не меняются значительно с изменением сезона. Таким образом, можно считать, что движение является установившимся.

6. Кроме того, так как рассматриваются движения больших масштабов, полагаем, на основании принципа подобия Гельмгольца (1), что вязкие члены уравнений движения отсутствуют.

Из сделанных предположений следует, что рассматривается задача о движениях жидкости в пленке, окружающей сферу. Это предположение не противоречит физике явления, ибо глубина поверхностного течения составляет 0,003% от среднего земного радиуса.

Из сделанных предположений наиболее внимательно надо отнестись к отбрасыванию вязких членов. Действительно, причиной существования течений является ветер, а сила ветра передается через силу трения между воздухом и водой. Далее, вязкие силы слоев, подстилающих поверхностный слой, влияют на характер поверхностных течений. Чтобы сохранить в уравнениях эти существенные для задачи величины, введем их в виде массовых сил. Эмпирические исследования показывают, что внутреннее трение следует представлять в виде силы, пропорциональной первой степени скорости, отклоненной от направления, противоположного скорости, влево на некоторый угол μ (2). Если через F_λ и F_θ обозначить компоненты массовых сил, направленные соответственно по параллелям и меридианам, то их можно представить в виде:

$$F_\lambda = f_\lambda - kv_\lambda + lv_\theta ,$$
$$F_\theta = f_\theta - kv_\theta - lv_\lambda , \tag{1}$$

где f_λ и f_θ — компоненты сил $\overline{f}$ трения между воздухом и водой; v_λ, v_θ, — соответственно, компоненты скорости течения вдоль параллели и меридиана, а k, l характеризуют коэффициент трения между горизонтальными слоями жидкости и угол отклонения μ.

Отметим, что $\overline{f}$ будет пропорциональна производной скорости ветра по нормали к поверхности и, сохраняя условие полного прилипания атмосферы у поверхности, получим, что $\overline{f}$ является функцией скорости.

Замена поверхностных сил действующего ветра объемными возможна, ибо сделанные ранее предположения сводят задачу о поверхностных течениях к движениям в бесконечно тонкой пленке, покрывающей сферу.

В сделанных предположениях уравнения движения с приближенным учетом вязкости запишутся в виде:

$$\frac{1}{R\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) = F_\lambda - \frac{v_\theta}{R\cos\theta}\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda} - \frac{\partial\,(v_\lambda\cos\theta)}{\partial\theta}\right] - 2\omega\sin\theta v_\theta ,$$
$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) = F_\theta + \frac{v_\lambda}{R\cos\theta}\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda} - \frac{\partial\,(v_\lambda\cos\theta)}{\partial\theta}\right] + 2\omega\sin\theta v_\lambda , \tag{2}$$

где R — средний радиус Земли; θ — широта; λ — долгота; ω — угловая скорость вращения Земли и

$$v^2 = v_\theta^2 + v_\lambda^2 .$$

Уравнение относительно компоненты скорости, направленной по радиусу, в сделанных предположениях, при пренебрежении членами, малыми по сравнению с силой тяжести, действующей по вертикали, дает гидростатическое распределение давления по вертикали.

Уравнения (2) служат для определения v_λ, v_θ и p при заданных очертаниях материков и величинах F_λ, F_θ.

II. Как указал Гельмгольц (1), сердцевину явления постоянных ветров или общей циркуляции атмосферы можно усмотреть в зональной циркуляции атмосферы. Итак, пусть задана зональная циркуляция атмосферы, т. е. ветра, дующие над однородной поверхностью. Примем за однородную поверхность сферу, равномерно покрытую жидкостью. Течения на этой сфере найдем, интегрируя уравнения (2), которые весьма просты для этого случая, ибо все величины зависят только от широты θ.

Найденные величины скоростей будут вида:

$$v'_{\lambda} = \frac{P(\theta)}{\cos\theta}, \qquad v'_{\theta} = \frac{A}{\cos\theta}, \tag{3}$$

где $P(\theta)$ — известная функция θ, A — постоянная величина. Если $A = 0$, то это значит, что нет опускания и поднятия вод — случай, наиболее интересный.

Найденные течения на сфере, равномерно покрытой жидкостью, не будут потенциальны, ибо силы, вызывающие течения, не имеют потенциала.

По аналогии с плоской задачей полагаем, что завихренность потока не меняется, если в свободный поток вносятся некоторые границы. Отсюда для решения задачи о поверхностных течениях в океанах имеем уравнение неразрывности и уравнение заданной завихренности течения в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(v_\theta\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\left(v_\lambda - \frac{p(\theta)}{\cos\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(v_\theta - \frac{A}{\cos\theta}\right) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Заметим, что, обращаясь к общим уравнениям движения в случае сферы, равномерно покрытой жидкостью, и сферы, покрытой жидкостью с расположенными на ней материками, будем иметь различные поля скоростей, а следовательно, и различные значения сил $\bar{F}$, ибо сила $\bar{F}$, как указывалось, зависит явно от скорости. Введем в уравнениях (4) следующую замену переменных:

$$\begin{gathered}v_1 = \cos\theta\left(v_\theta - \frac{A}{\cos\theta}\right), \\ v_2 = \cos\theta\left(v_\lambda - \frac{P(\theta)}{\cos\theta}\right), \\ q = \int\frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Указанная замена независимого переменного есть меркаторовская проекция сферы на плоскость λ, q.

После замены переменных (5) из уравнений (4) получим, что:

$$\begin{gathered}v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \\ v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\psi}{\partial q}.\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда можно построить функцию комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал, а ψ — функция тока. Через функцию тока ψ уравнение линий тока можно представить в виде:

$$\psi - P_1(\theta) - A\lambda = \mathrm{const}, \tag{7}$$

где

$$P_1(\theta) = \int \frac{P(\theta)}{\cos\theta} d\theta.$$

Отсюда для того, чтобы получить кинематическую картину течений в океанах по заданному полю зональной циркуляции атмосферы, достаточно задать функцию комплексного переменного w так, чтобы одна из линий тока (7) совпадала с очертанием материков.

Комплексный потенциал выбранной особенности функции комплексного переменного на сфере можно построить, используя преобразование (5), из которого следует, что особенности на сфере будет соответствовать бесконечное множество тех же особенностей на плоскости λ, q, отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda = 2\pi$.

Рассматриваемая задача в указанной постановке сводится к задаче Дирихле либо Неймана.

Простейшим примером вихревого течения (3) на сфере является течение с постоянной угловой скоростью. Это течение замечательно тем, что дублет с осью, направленной по параллели, помещенной в любой точке на сфере, дает обтекание окружности.

Отметим, что рассмотренная задача обобщается на случай неустановившихся периодических движений при условии неизменности силовых линий.

Поступило
18 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Извеков и Н. Е. Кочин, Динамическая метеорология, ч. I, Л., 1935.
[2] С. П. Хромов, Введение в синоптический анализ, М., 1937.