Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 3

МЕХАНИКА

И. И. МЕТЕЛИЦЫН

К ВОПРОСУ О КАЧЕНИИ КОЛЕСА С ЭЛАСТИЧНОЙ ШИНОЙ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 25 V 1948)

1. Предположим, что беговая поверхность шины есть поверхность тора (рис. 1). Положение точки на поверхности тора по отношению к осям $C\xi\eta\zeta$, жестко связанным с ободом колеса, определяется углами α и β. Положение тора определяется координатами x_c, y_c, z_c центра C и тремя углами ψ, θ, φ, причем угол φ есть угол поворота осей $C\xi\eta\zeta$ по отношению к подвижным осям $Cx_1y_1z_1$ (ось Cx_1 параллельна плоскости Oxy, ось Cy_1 совпадает с осью $C\eta$) (рис. 2).

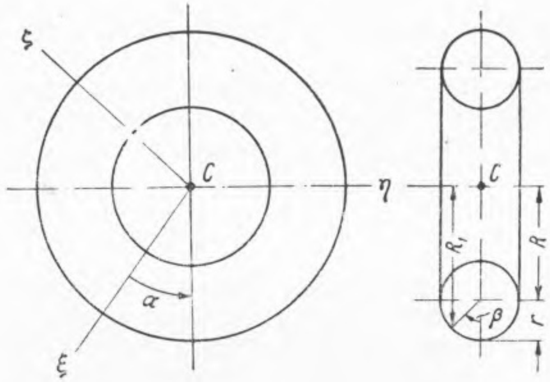

Рис. 1

Если поверхность тора не деформирована, то

$$\beta = \theta, \qquad z_c = r + R\cos\theta.$$

2. Под влиянием приложенных сил беговая поверхность шины деформируется; вблизи точки прикосновения поверхности с полотном дороги имеется небольшое смятие, вследствие чего соприкосновение происходит не в одной точке, а по небольшой площадке.

Если даже отвлечься от этого смятия, то все же можно заметить, что беговая поверхность шины не является тором, так как сечения тора плоскостями, проходящими через ось $C\eta$, сдвинуты вдоль этой оси, а круговые сечения деформированы.

Можно охарактеризовать деформацию, если задать боковое смещение u точек беговой поверхности, лежащих до деформации в плоскости $C\xi\zeta$, в направлении оси $C\eta$; смещение считается положительным, если оно противоположно оси $C\eta$. Допустив, что смещение для точек, близких к этой плоскости, не зависит от β.

При качении колеса смещение u точки прикосновения изменяется по отношению к осям $G\xi\eta\zeta$ не только вследствие изменения приложенных сил, но и благодаря вращению осей. Кривые, которые полу-

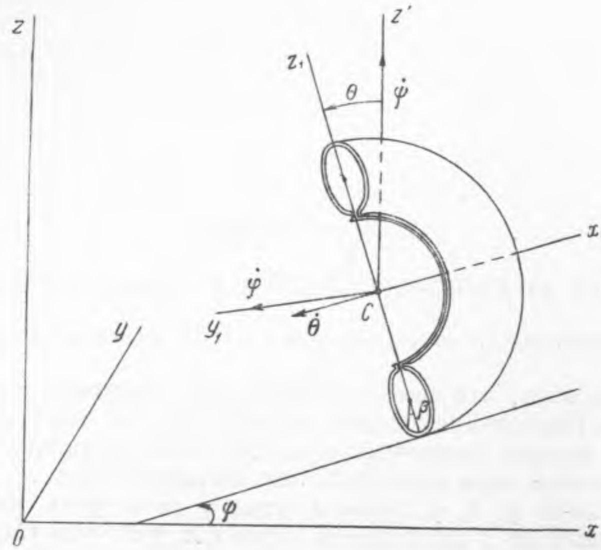

Рис. 2

чаются из круговых сечений $\beta = \text{const}$ после деформации, назовем «беговыми» кривыми.

3. Если колесо катится без скольжения, то скорость точки P поверхности, совпадающей с точкой прикосновения, равна нулю. Скорость точки P складывается из переносной $\bar{v}_e$ и относительной $\bar{v}_r$, причем

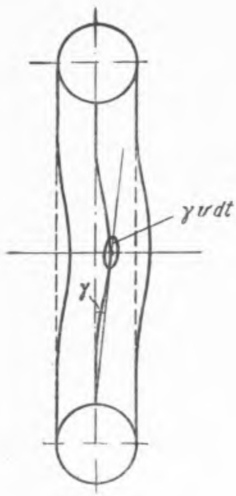

Рис. 3

$$\bar{v}_e = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \overline{CP}.$$

Изменение смещения u определяется как изменением формы беговой кривой по отношению к осям $Cx_1 y_1 z_1$, так и смещением точки касания вдоль беговой кривой вследствие поворота колеса (рис. 3); поэтому

$$\bar{v}_r = -\left(\frac{du}{dt} + v\gamma\right)\bar{j}.$$

Первое уравнение кинематической связи имеет вид:

$$\bar{v}_c + \bar{\omega} \times \overline{CP} - \left(\frac{du}{dt} + v\gamma\right)\bar{j} = 0. \qquad (2)$$

Если колесо не скользит, то скорости всех точек площадки смятия равны нулю; это можно выразить, приравняв нулю проекции угловой скорости площадки смятия на нормаль к плоскости Oxy. Так как угол γ изменяется вместе с изменением формы беговой кривой и, кроме того, от смещения площадки вдоль беговой кривой, то

$$\omega_n - \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{ds} v\right) = 0. \qquad (3)$$

Здесь $d\gamma / ds = K$ есть кривизна проекции беговой кривой на касательную плоскость (геодезическая кривизна).

4. Касательные и нормальные реакции полотна дороги приводятся к силе $\overline{F}'(X_1', Y_1', Z_1')$ и к паре с моментом $\overline{L}'$.

Примем, что боковая реакция Y_1' пропорциональна боковому смещению точки касания

$$Y_1' = -c_1 u, \tag{4}$$

а момент пары трения верчения L_n пропорционален углу γ,

$$L_n' = -c_2 \gamma. \tag{5}$$

Кривизна K зависит от закона распределения сил трения по площадке смятия.

Эта зависимость должна быть изучена отдельно.

5. Ниже выписаны уравнения движения центра тяжести колеса в проекциях на ось Cx_1, на нормаль Cz' и на ось Cy', а также уравнения моментов относительно осей Cx_1, Cy_1, Cz_1. Внешние силы (исключая реакцию плоскости) приведены к результирующей силе $\overline{F}$ (X_1, Y_1, Z_1), приложенной в центре C, и к паре с моментом $\overline{L}_c$.

Так как уравнения (4) и (5) справедливы лишь в случае очень малых углов наклона θ плоскости колеса, то в левых частях уравнений сохранены только первые степени угла θ и угловой скорости $\dot{\theta}$.

$$\begin{gathered}
M(\dot{v}_{cx_1} - v_{cy'}\dot{\psi}) = X_1 + X_1', \\
M(\dot{v}_{cy'} + v_{cx_1}\dot{\psi}) = (Y_1 + Y_1')\cos\theta + (Z_1 + Z_1')\sin\theta, \\
M\dot{v}_{cz'} = -(Y_1 + Y_1')\sin\theta + (Z_1 + Z_1')\cos\theta,
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
A\ddot{\theta} + B\dot{\varphi}\dot{\psi} + (A - B)\dot{\psi}^2\theta = -Y_1' R_1 - Z_1'(r\sin\theta - u) - L_x, \\
C\ddot{\psi} - B\dot{\varphi}\dot{\theta} = X_1'(r\sin\theta - u) + L_z + L_z', \\
B\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta) = -X_1' R_1 + L_y + L_y'.
\end{gathered}$$

Кинематические уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
v_{cx_1} = (R + r)\dot{\varphi} \quad \text{или} \quad v = R_1\dot{\varphi}, \\
v_{cy_1} = (R + r)\dot{\theta} - \left(\frac{du}{dt} + v\gamma\right), \\
v_{cz_1} = 0, \\
\dot{\psi} - \dot{\varphi}\theta - \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{ds}v\right) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Заменяя Y'_1 и L_z' в уравнениях (6) из (4) и (5), получим всего 10 уравнений для определения 10 неизвестных функций: $x_c, y_c, z_c, \psi, \theta, \varphi, u, \gamma, X_1', Z_1'$.

В работах, посвященных изучению качения колеса, не всегда пишут одинаково уравнения движения ([1]), хотя все авторы принимают одни и те же предпосылки.

Поступило
21 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Чудаков, Качение автомобильного колеса, 1947; Певзнер, Теория устойчивости автомобиля, 1947; Келдыш, Тр. ЦАГИ, № 564 (1945); J. Whylie, J. Aeronautical Sci., **7**, No. 2, December (1939); Fromm, Becker, Maruhn, Schwingungen in Automobillenkungen, Berlin, 1931.