Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. А. ЛЮСТЕРНИК и В. А. ДИТКИН

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть Q — область k-мерного многообразия R_k в n-мерном евклидовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k \leqslant n)$; $f(A)$ — функция точки A на Q; dv — элемент k-мерного объема на Q.

Будем рассматривать функционал

$$I(f) = \iint \underset{Q}{\cdots} \int f(A)\varphi(A)\,dv_A, \tag{1}$$

где $\varphi(A)$ — заданная на Q функция, фиксированная для данного функционала.

«Кубатурные» формулы дают приближенное значение функционала (1) через суммы

$$\bar{J}(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(A_i) \tag{2}$$

где c_i — константы, A_i — точки области Q.

Речь идет о подборе коэффициентов c_i и точек A_i, при которых сумма (2) дает «достаточно хорошее» приближение интеграла (1). В качестве меры приближения сумм (2) к интегралу (1) принимаем положительное число s такое, что для произвольного полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степени $\leqslant s$ $I(P) = \bar{J}(P)$. Или (если точки имеют координаты $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$)

$$\iint \underset{Q}{\cdots} \int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dv = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{1i}^{k_1} x_{2i}^{k_2} \ldots x_{ni}^{k_n} \tag{3}$$

при всех целых неотрицательных $k_1, k_2, \ldots, k_n$, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant s$.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — операторы частного дифференцирования: $D_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$e^{x_1 D_1 + x_2 D_2 + \ldots + x_n D_n} f(x_1', x_2', \ldots x_n') = f(x_1 + x_1', \; x_2 + x_2', \ldots, x_n + x_n').$$

Сокращенно будем писать $(x, D) = x_1 D_1 + x_2 D_2 + \ldots + x_n D_n$ и аналогично $(x^i, D) = x_{1i} D_1 + x_{2i} D_2 + \ldots + x_{ni} D_n$. Тогда

$$\left[\iint \underset{Q}{\cdots} \int e^{(x, D)} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dv\right] f(x_1', x_2', \ldots, x_n') =$$
$$= \iint \underset{Q}{\cdots} \int f(x_1' + x_1, \; x_2' + x_2, \ldots, x_n' + x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dv.$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{m} c_i e^{(x^i,\,D)} f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \sum_{i=1}^{m} c_i f(x_1' + x_{1i}, x_2' + x_{2i}, \ldots, x_n' + x_{ni}).$$

Если формула

$$\iint\limits_{Q}\cdots\int f\varphi\, dv = \sum_{i=1}^{m} c_i f(A_i) \tag{4}$$

верна для случая, когда f есть произвольный полином степени $\leqslant s$, то оператор

$$U = \iint\limits_{Q}\cdots\int e^{(x,\,D)} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dv - \sum_{i=1}^{m} c_i e^{(x^i,\,D)} \tag{5}$$

обращает в нуль все полиномы степени $\leqslant s$. Разлагая разность (5) по степеням $D_1, D_2, \ldots, D_n$, получим:

$$U = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} D_1^{k_1} D_2^{k_2} \ldots D_n^{k_n}.$$

Следовательно, для того чтобы оператор U обращал в нуль все полиномы степени $\leqslant s$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} = 0$ при $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant s$.

Таким образом, *для того чтобы кубатурная формула* (4) *была верна для всех полиномов степени* $\leqslant s$, *необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты* $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ *при* $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant s$ *в разложении оператора* U *по степеням* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *равнялись нулю.*

Это обстоятельство весьма просто получается при другом истолковании формулы (4); именно, будем считать $D_1, D_2, \ldots, D_n$ произвольными множителями. Тогда

$$e^{(x,\,D)} = e^{x_1 D_1} e^{x_2 D_2} \ldots e^{x_n D_n} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{D_1^{k_1} D_2^{k_2} \ldots D_n^{k_n}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

Выражение U (см. (4)) есть функция параметров $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и, очевидно,

$$U = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{D_1^{k_1} D_2^{k_2} \ldots D_n^{k_n}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left[\iint\limits_{Q}\cdots\int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dv - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{m} c_i x_{1i}^{k_1} x_{2i}^{k_2} \ldots x_{ni}^{k_n} \right].$$

Отсюда:

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left[\iint\limits_{Q}\cdots\int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dv - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{m} c_i x_{1i}^{k_1} x_{2i}^{k_2} \ldots x_{ni}^{k_n} \right].$$

Таким образом, обращение в нуль всех коэффициентов $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, $k_1+k_2+\ldots+k_n\leqslant s$, означает верность формулы (5) для всех многочленов степени $\leqslant s$.

Эти элементарные соображения полезны при выводе кубатурных формул. Найдем, например, такую формулу для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Здесь оператор

$$U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xD_1+yD_2-x^2-y^2}\,dx\,dy-\sum_{i=1}^{m} c_i e^{x_iD_1+y_iD_2}.$$

Но

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xD_1+yD_2-x^2-y^2}\,dx\,dy=e^{\Delta/4}=$$

$$=1+\frac{D_1^2}{4}+\frac{D_2^2}{4}+\frac{1}{32}(D_1^4+2D_1^2D_2^2+D_2^4)+\ldots, \tag{6}$$

где $\Delta=D_1^2+D_2^2$ — оператор Лапласа.

Теперь следует подобрать точки $A_i(x_i, y_i)$ и числа c_i так, чтобы $\sum c_i e^{x_iD_1+y_iD_2}$ в своем разложении по степеням D_1 и D_2 имела первые члены, совпадающие с первыми членами ряда (6). Например, располагая точки A_i в вершинах квадрата $A_1(\rho, 0)$; $A_2(-\rho, 0)$, $A_3(0, \rho)$ и $A_4(0, -\rho)$, имеем, в силу симметрии, $c_i=c$ $(i=1, 2, 3, 4)$, и поэтому

$$U=e^{\Delta/4}-c\,(e^{\rho D_1}+e^{-\rho D_1}+e^{\rho D_2}+e^{-\rho D_2})=e^{\Delta/4}-2c\operatorname{ch}(\rho D_1)-2c\operatorname{ch}(\rho D_2)=$$

$$=1+\frac{D_1^2}{4}+\frac{D_2^2}{4}+\frac{D_1^4}{32}+\frac{D_1^2D_2^2}{16}+\frac{D_2^4}{32}+\ldots$$

$$\ldots-4c-c\rho^2(D_1^2+D_2^2)-\frac{c\rho^4}{3}(D_1^4+D_2^4)-\ldots,$$

откуда $4c=1$, $c\rho^2=1/4$; поэтому $c=1/4$, $\rho=1$.

Следовательно, кубатурная формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{4}\,[f(1,0)+f(0,1)+f(-1,0)+f(0,-1)]$$

верна для всех полиномов степени $\leqslant 3$. Нетрудно привести и более точные формулы. Например, если $A_1, A_2, \ldots, A_8$ и $B_1, B_2, \ldots, B_8$ — вершины правильных восьмиугольников, радиусы описанных окружностей которых соответственно равны $2-\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$, то справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{2}+1}{16\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{8} f(A_i)+\frac{\sqrt{2}-1}{16\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{8} f(B_i),$$

точная для всех многочленов от x, y степени не выше 7.

2*

Нетрудно привести примеры и еще более совершенных формул. Авторами получены аналогичные формулы и для других областей (площадь круга, трехмерный шар, правильные многоугольники).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
20 V 1948