Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Р. О. КУЗЬМИН

О ФОРМУЛЕ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Первая из напечатанных работ П. Л. Чебышева ([1]) посвящена кратным интегралам. В ней он дает теорему:

Какова бы ни была форма функции f, имеем уравнение:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z)\dots f(x^m+y^n+z^p+\dots)\,dx\,dy\,dz\dots=$$

$$=\int_0^\infty \Phi(u)\,f(u)\,du,$$

в котором $\Phi(u)$ определена по данным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ при помощи квадратур формулой

$$\Phi(u^2)=\frac{\psi(u\sqrt{-1})-\psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2\sqrt{-1}},$$

где

$$\psi(u)=\int_0^\infty e^{-\alpha}d\alpha\int_0^\infty \varphi_1(x)\,e^{-\alpha x^m/u^2}dx\int_0^\infty \varphi_2(y)\,e^{-\alpha y^n/u^2}dy\int_0^\infty \varphi_3(z)\,e^{-\alpha z^p/u^2}dz\dots$$

Эта теорема предполагает, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ таковы, что:

1. $\psi(u)$ и ее производные остаются конечными для всех вещественных положительных значений u или для всех мнимых значений u с положительной вещественной частью.

2. Функция $\psi(u)$ обращается в нуль при $u=a\pm z\sqrt{-1}$ или $u=z+a\sqrt{-1}$, когда $a=\infty$, каково бы ни было значение z, лишь бы оно было вещественным и положительным.

Чебышев не привел доказательства этой теоремы, а ограничился двумя примерами ее приложения. В них он вывел из этой теоремы формулы, полученные раньше Лиувиллем и Коши, исходя из других соображений.

Насколько мне известно, и в дальнейшем никто не дал доказательства теоремы Чебышева. Быть может, в связи с этим стоит то обстоятельство, что эта теорема не упоминается, например, в монографии Зинина ([2]), посвященной кратным интегралам, и где было бы естественно встретить теорему Чебышева.

Было желательно дать доказательство теоремы Чебышева — она и сама по себе интересна, а доказательство, выясняя природу теоремы, помогло бы лучше представить творческий облик П. Л. Чебышева в молодости.

Здесь я даю доказательство теоремы Чебышева. При этом для простоты я беру случай тройного интеграла, а показатели m, n, p полагаю равными единице, что не нарушает общности. Величину u^2 я заменяю на u.

Для начала рассмотрим интеграл

$$\psi(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z)\,e^{-\alpha-\frac{\alpha(x+y+z)}{u}}\,dx\,dy\,dz\,d\alpha, \tag{1}$$

где $\operatorname{Re} u>0$, а функции φ_1, φ_2, φ_3 таковы, что интеграл сходится абсолютно. Интегрируя по α, получаем:

$$\psi(u)=u\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z)}{x+y+z+u}\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Отсюда, полагая $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta-\xi-\eta$, приходим к равенству:

$$\frac{\psi(u)}{u}=\int_0^\infty \frac{\omega(\zeta)\,d\zeta}{\zeta+u}, \tag{3}$$

где

$$\omega(\zeta)=\int\limits_{\xi+\eta<\zeta,\ \xi>0,\ \eta>0}\int \varphi_1(\xi)\,\varphi_2(\eta)\,\varphi_3(\zeta-\xi-\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4}$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3 предполагаются интегрируемыми по Риману. Поэтому можно показать, что $\omega(\zeta)$ непрерывная функция от ζ.

Из (3) видно, что $\psi(u)/u$ регулярна на плоскости u, в которой проведен разрез по отрицательной вещественной оси. Равенство (3) представляет интегральное уравнение относительно $\omega(\zeta)$.

Следующий прием позволяет с легкостью решить его, как и многие другие уравнения. Пусть u — данное положительное число. Из (3) получаем равенство:

$$\frac{\psi(-u+\varepsilon i)}{-u+\varepsilon i}-\frac{\psi(-u-\varepsilon i)}{-u-\varepsilon i}=\int_0^\infty\left[\frac{1}{\zeta-u+\varepsilon i}-\frac{1}{\zeta-u+\varepsilon i}\right]\omega(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\psi(-u-\varepsilon i)}{-u+\varepsilon i}-\frac{\psi(-u-\varepsilon i)}{-u-\varepsilon i}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\frac{2\varepsilon i\,\omega(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-u)^2+\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Пользуясь подстановкой $\zeta-u=\varepsilon t$, легко убедиться, что предел в правой части равен $2\pi i\,\omega(u)$. Поэтому из (5) при $u>0$ получается, что

$$\omega(u)=\Phi(u), \tag{6}$$

где

$$\Phi(u)=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\psi(-u+\varepsilon i)-\psi(-u-\varepsilon i)]}{2\pi i u}. \tag{7}$$

Заменяя u на ζ, по (4) и (6) получаем:

$$\int\limits_{\xi+\eta<\zeta,\ \xi>0,\ \eta>0}\int \varphi_1(\xi)\,\varphi_2(\eta)\,\varphi_3(\zeta-\xi-\eta)\,d\xi\,d\eta=\Phi(\zeta). \tag{8}$$

Умножим обе части на $f(\zeta)$ и возьмем интеграл от 0 до ∞, предполагая, что интеграл абсолютно сходящийся.

Тогда из (8) получаем:

$$\int_0^\infty f(\zeta)\,d\zeta \int_{\xi>0,\ \eta>0,\ \xi+\eta<\zeta}\int \varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)\varphi_3(\zeta-\xi-\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int_0^\infty \Phi(\zeta) f(\zeta)\,d\zeta. \tag{9}$$

В левой части положим: $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta-\xi-\eta=z$.

После этого получается равенство:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) f(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^\infty \Phi(\zeta) f(\zeta)\,d\zeta. \tag{10}$$

Для общего случая получается следующая теорема.

Существует равенство:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)\ldots f(x^m+y^n+z^p+\ldots)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^\infty \Phi(u) f(u)\,du,$$

где при $u>0$ функция $\Phi(u)$ определяется равенством:

$$\Phi(u)=\frac{1}{u}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\psi(-u+\varepsilon i)-\psi(-u-\varepsilon i)\right],$$

а функция $\psi(u)$ при $\operatorname{Re} u>0$ представляется интегралом:

$$\psi(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)\ldots e^{-\alpha\left(1+\frac{x^m+y^n+z^p+\ldots}{u}\right)}\,d\alpha\,dx\,dy\,dz\ldots$$

Предполагается, что названные интегралы абсолютно сходящиеся, а тот, где содержится $f(x^m+y^n+z^p+\ldots)$, остается таким и при замене функции f на единицу.

Поступило
31 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Чебышев, Полн. собр. соч., II, 1947, стр. 5—6. [2] Н. Зинин, Различные приемы приведения кратких интегралов и главнейшие приложения этих приемов, Варшава, 1892.