Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 3

МАТЕМАТИКА

М. ГРАБАРЬ

ОТОБРАЖЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 V 1948)

I. Пусть L — линейное, нормированное пространство и $x(t)$ — абстрактная функция действительного переменного, принимающая значения в пространстве L. Функция $x(t)$ называется дифференцируемой в интервале (a, b), если отношение $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ при всяком $t \in (a, b)$ сильно сходится к некоторому элементу $x'(t) \in L$.

Пусть теперь на множестве $E \subset L$ задан оператор F, принимающий значения в L, и пусть $x(t)$ — абстрактная функция, принимающая значения в E. Мы говорим, что функция $x(t)$ удовлетворяет в интервале (a, b) дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)] \tag{1}$$

и начальным данным, если $x'(t) = F[x(t)]$ при всяком $t \in (a, b)$ и $x'(0) = x_0$, где x_0 — фиксированный элемент из E.

Если пространство L есть сепарабельное гильбертово пространство H, то всякое решение $x(t)$ уравнения (1) будет решением некоторой счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Точнее: пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots)$ и $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$, $x \in H$. Тогда, если $x(t)$ есть решение уравнения (1), то функции $x_i(t)$ являются решениями системы:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, \ldots), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{1'}$$

Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому уравнение (1) не эквивалентно системе (1').

Если оператор F непрерывен, то функции $f_i(x)$ непрерывны как функции точки x гильбертова пространства H.

II. Пусть R — компакт и R_t — динамическая система в R. Пусть $p \in R$. Через p_t будем обозначать точку на траектории точки p, отвечающую значению параметра t. Через $\{p_t\}$ будем обозначать траекторию точки p. Мы будем предполагать, что система R_t содержит не более одной особой точки. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема. *Существует такое топологическое отображение $\Phi(p)$ компакта R в гильбертово пространство H и такой непрерывный оператор F, определенный на множестве $\Phi(R) \equiv R$, что траектории $\{p_t\}$ системы R_t являются решениями дифференциального уравнения*

$$\frac{dp_t}{dt} = F[p_t] \tag{2}$$

при начальных данных $p_t|_{t=0} = p \in R$.

Доказательство. Рассмотрим вполне аддитивную меру μ, определенную на некотором теле подмножеств прямой $J: -\infty < t < \infty$, содержащем все борелевские множества, и удовлетворяющую следующим условиям:

1°. $\mu(J) = M < \infty$.

2°. $\mu(\Delta) > 0$ для любого интервала Δ.

3°. Для любого B $\mu(B) = \inf \mu(G)$ по всем открытым $G \supset B$.

Рассмотрим, далее, пространство L^2_μ всех μ-измеримых вещественных функций $f(t)$, определенных на всей прямой J и обладающих суммируемым (относительно меры μ) квадратом, со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами

$$(f, g) = \int_J f(t) \cdot g(t)\, d\mu, \qquad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

L^2_μ изоморфно и изометрично вещественному гильбертову пространству H. Под пространством H мы всюду в дальнейшем будем понимать пространство L^2_μ.

Заметим, что каждая μ-измеримая, ограниченная на всей прямой J функция $f(t)$ суммируема на J (относительно μ). В частности, L^2_μ содержит все непрерывные, ограниченные на всей оси функции.

Построим теперь топологическое отображение Φ пространства R в пространство L^2_μ. Для этого рассмотрим непрерывную действительную функцию $\psi(p)$, определенную на R и обладающую следующим свойством. Положим $\psi_p(t) = \psi[p_t]$. Тогда, если $p \neq q$, то $\psi_p(t) \not\equiv \psi_q(t)$. Существование такой функции для динамических систем, расположенных в компактах и содержащих не более одной особой точки, было доказано М. Бебутовым (1).

Положим теперь

$$\varphi_p(x) = e^{-x^2} \int_0^x \psi_p(\tau)\, d\tau.$$

Функция $\varphi_p(x)$ непрерывна и ограничена на всей оси: $-\infty < x < +\infty$. В самом деле, пусть $\max\limits_{q \in R} |\psi(q)| = C$. Тогда

$$\varphi_p(x) \leqslant C \max_{-\infty < x < +\infty} |xe^{-x^2}| = C_0 < \infty.$$

Заметим, что константа C_0 не зависит от p.

В силу замечания, сделанного в начале доказательства, функция $\varphi_p(x) \in L^2_\mu$, и мы определим отображение Φ, положив $\Phi(p) = \varphi_p(x)$. Отображение $\Phi(p)$ взаимно однозначно. В самом деле, пусть $p \neq q$. Тогда $\psi_p(\tau) \not\equiv \psi_q(\tau)$ и, следовательно, $\varphi_p(x) \not\equiv \varphi_q(x)$. Так как φ_p и φ_q непрерывны, то найдется интервал Δ такой, что $\varphi_p(x) \neq \varphi_q(x)$, если $x \in \Delta$, но $\mu(\Delta) > 0$, и, следовательно, φ_p и φ_q различны как точки пространства L^2_μ.

Покажем, что отображение Φ непрерывно. Так как R компакт, то этим будет доказано, что Φ топологическое отображение.

Предварительно установим один достаточный признак сильной сходимости в L^2_μ.

Лемма. *Пусть последовательность $\varphi_n(x)$ непрерывных функций, ограниченных одной константой, сходится при всяком x, $-\infty < x < +\infty$, к непрерывной функции $\varphi(x)$. Тогда* $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$, т. е. $\varphi_n \Longrightarrow \varphi$ ($\Longrightarrow$ *означает сильную сходимость в* L^2_μ).

Утверждение леммы является непосредственным следствием теоремы об ограниченной сходимости под знаком интеграла, справедливой для любой вполне аддитивной и ограниченной меры ([2]).

В самом деле, последовательность $\eta_n(x)=[\varphi(x)-\varphi_n(x)]^2$ ограниченно сходится к 0, следовательно, $\int\limits_J \eta_n(x)\,d\mu\to 0$, т. е. $\varphi_n =\!\!\to \varphi$, что требовалось доказать.

Пусть теперь $p_n\to p$. Тогда $\psi_{p_n}(\tau)\to\psi_p(\tau)$ равномерно на каждом конечном интервале (1), следовательно, $\varphi_{p_n}(x)\to\varphi_p(x)$ при всяком x. С другой стороны, мы раньше установили, что функции φ_{p_n} и φ_p ограничены одной константой. На основании леммы заключаем, что $\varphi_{p_n} =\!\!\to \varphi_p$, т. е. $\Phi(p_n) =\!\!\to \Phi(p)$, что и доказывает непрерывность Φ.

Теперь мы можем отождествить компакт R с его образом $\Phi(R)$ в пространстве L^2_μ. Определим на множестве $R=\Phi(R)$ оператор F. Для этого рассмотрим отношение $\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h}$ и найдем предел этого отношения при $h\to 0$.

$$\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h}=\frac{e^{-x^2}}{h}\left[\int\limits_0^x \psi_{p_h}(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^x \psi_p(\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{h}\left[\int\limits_0^x \psi_p(\tau+h)\,d\tau-\int\limits_0^x \psi_p(\tau)\,d\tau\right]=\frac{e^{-x^2}}{h}\left[\int\limits_x^{x+h} \psi_p(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^x \psi_p(\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{h}\left[\int\limits_x^{x+h} \psi_p(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^h \psi_p(\tau)\,d\tau\right],$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h}=e^{-x^2}[\psi_p(x)-\psi_p(0)]=\overset{*}{\varphi}_p(x).$$

Функция $\varphi_p^*(x)$ непрерывна и ограничена на всей оси, следовательно, $\varphi_p^*(x)\in L^2_\mu$, и мы положим $F(p)=\varphi_p^*(x)$.

Докажем, что оператор F непрерывен.

Пусть $p_n\to p$. Тогда $\psi_{p_n}(x)\to\psi_p(x)$ равномерно на каждом конечном интервале; следовательно, $\overset{*}{\varphi}_{p_n}(x)\to\overset{*}{\varphi}_p(x)$ при всяком x, $-\infty<x<+\infty$. С другой стороны, функции $\overset{*}{\varphi}_{p_n}$ и $\overset{*}{\varphi}_p$, очевидно, ограничены одной константой. На основании леммы заключаем, что $\overset{*}{\varphi}_{p_n} =\!\!\to \overset{*}{\varphi}_p$, т. е. $F(p_n) =\!\!\to F(p)$, ч. т. д.

Покажем, наконец, что отношение $\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h}$ остается ограниченным при $h\to 0$.

Имеем:

$$\left|\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h}\right|\leqslant 2\sup_{-\infty<x<+\infty}|\psi_p(x)|\leqslant 2\max_{q\in R}|\psi(q)|=2C.$$

На основании леммы заключаем, что

$$\frac{\varphi_{p_h}(x)-\varphi_p(x)}{h} =\!\!\to \varphi_p^*(x).$$

Заменим теперь в полученных формулах $\varphi_p(x)$ через p и $\varphi_p^*(x)$ через $F(p)$. Получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_h - p}{h} = F(p), \tag{3'}$$

где lim понимается в смысле сильной сходимости в L_μ^2.

Так как (3') имеет место для любой точки $p \in R$, то его можно переписать в виде:

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{t+h} - p_t}{h} = F[p_t], \tag{3}$$

причем $p_t|_{t=0} = p$. Отсюда видно, что траектории $\{p_t\}$ системы R_t являются решениями дифференциального уравнения $dp_t/dt = F[p_t]$ при начальных условиях $p_t|_{t=0} = p \in R$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Как известно, всякую динамическую систему, расположенную в локально компактном пространстве со счетной базой и не содержащую особых точек, можно включить в динамическую систему, лежащую в компакте и содержащую лишь одну особую точку. Тем самым наша теорема оказывается справедливой для класса всех динамических систем, лежащих в локально компактных пространствах со счетной базой и не содержащих вовсе особых точек.

Поступило
20 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Бебутов, Бюлл. Моск. гос. ун-та, 2, № 5 (1941). [2] А. Д. Александров, Математ. сб., 9 (51):3, 593 (1941),