Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

О ПРИНЦИПЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 IV 1948)

Принцип двойственности в теории плоских щелевых антенн был впервые сформулирован А. А. Пистолькорсом (1).

В несколько иной форме аналогичный принцип был дан М. А. Леонтовичем в теории дифракции плоских электромагнитных волн у плоских экранов (2).

В настоящей заметке мы изложим еще одну форму весьма общего принципа двойственности, который, несмотря на его элементарность, насколько нам известно, не излагался в литературе.

Принцип этот проще всего сформулировать, рассмотрев следующие два случая.

I. Пусть в пространстве с $\sigma = 0$ и $\varepsilon = \mu = 1$* расположен бесконечно тонкий, идеально проводящий (бесконечный) плоский экран S

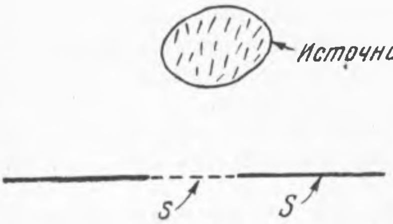

Рис. 1

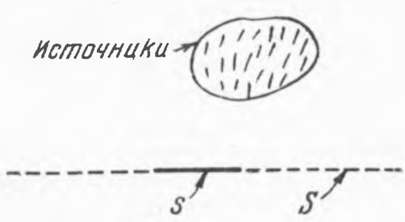

Рис. 2

с отверстием s произвольной формы. В общем случае отверстие может быть многосвязным. Будем считать, что в верхнем полупространстве (рис. 1) находятся источники (токи), распределенные любым заданным образом.

Поле, создаваемое этими источниками в отсутствие экрана, обозначим буквами $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$, а полное поле с учетом экрана — буквами $\vec{E}$, $\vec{H}$.

II. Параллельно этому случаю рассмотрим ему взаимный, когда экран S убран, а отверстие s металлизировано (рис. 2). Что касается источников, то мы заменим их теперь новыми, расположенными также в верхнем полупространстве.

Поле их в отсутствие экрана обозначим буквами $\vec{\mathfrak{E}}^0$, $\vec{\mathfrak{H}}^0$, а полное поле с учетом экрана s — буквами $\vec{\mathfrak{E}}$, $\vec{\mathfrak{H}}$.

---

* Не представляет труда обобщить все результаты на случай любой однородной среды.

Между распределением источников в первом и втором случае должна существовать связь, которую мы зададим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathfrak{E}}^0 &= \vec{H}^0, \\ \vec{\mathfrak{H}}^0 &= -\vec{E}^0, \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{в нижнем полупространстве,} \\ \text{включая плоскость } s+S. \end{array} \tag{1}$$

Очевидно, задав (например) источники в первом случае, можно различными способами подобрать распределение источников в случае II, при котором выполняется условие (1). Например, задав источники в виде магнитных токов в первом случае и равных им электрических токов во втором, обеспечим выполнение равенств (1) во всем пространстве.

Принцип двойственности, выражающий связь между полями обеих задач $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{\mathfrak{E}}$, $\vec{\mathfrak{H}}$ в нижнем полупространстве, запишется при этом так:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^0 + \vec{\mathfrak{H}}, \\ \vec{H} &= \vec{H}^0 - \vec{\mathfrak{E}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Доказательство этого предложения базируется на следующих почти очевидных положениях.

1) Уравнения Максвелла остаются инвариантными (т. е. не изменяются) при замене $\vec{E}$ на $\vec{H}$ и одновременно $\vec{H}$ на $-\vec{E}$.

2) Поле внутри бесконечной области, ограниченной замкнутой поверхностью (при отсутствии там источников), однозначно определяется заданием тангенциальной составляющей электрического вектора на одной части поверхности и тангенциальной составляющей магнитного вектора на остальной части поверхности.

3) Поверхностные токи, текущие по бесконечно тонкому плоскому экрану любой формы, возбуждают поле, магнитный вектор которого не имеет касательных составляющих на части геометрической плоскости, дополняющей экран до бесконечной плоскости.

Первые два утверждения хорошо известны и не нуждаются в доказательствах; что касается третьего, то оно немедленно вытекает из следующих элементарных соображений.

Рассматривая токи, текущие по экрану, как сумму элементарных токов (диполей Герца), можно утверждать, что магнитные линии каждого из них имеют форму кругов, оси которых совпадают с элементарными токами, т. е. лежат в плоскости экрана.

Таким образом, магнитные линии элементарных токов, а следовательно, и результирующего поля, пересекают бесконечную плоскость в части, не совпадающей с экраном, под прямым углом.

Переходя к доказательству принципа двойственности (2), будем считать, что поле $\vec{\mathfrak{E}}$, $\vec{\mathfrak{H}}$ решает задачу II (рис. 2) и, следовательно, удовлетворяет в нижнем полупространстве однородным уравнениям Максвелла, не имеет там источников и, кроме того, для него выполнены граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_t &= \mathfrak{H}_t^0 \quad \text{на } S, \\ \mathfrak{E}_t &= 0 \quad \text{на } s. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Первое из этих условий вытекает из положения 3, а второе очевидно.

Для того чтобы поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, определяемое уравнениями (2), действительно являлось решением задачи I (рис. 1) для нижнего полупространства, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\vec{E}$, $\vec{H}$ удовлетворяло однородным уравнениям Максвелла и не имело там источников, что, очевидно, выполнено благодаря самому виду равенства (2) и положению 1.

б) Для $\vec{E}$, $\vec{H}$ должны быть выполнены граничные условия (см. рис. 1 и положение 3).

$$\left.\begin{aligned} E_t &= 0 \quad \text{на } S, \\ H_t &= H_t^0 \ \text{на } s. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, определяемое равенствами (2), автоматически удовлетворяет условиям (4), если учесть при этом равенства (1) и (3).

Действительно,

$$\begin{aligned} E_t &\equiv E_t^0 + \mathfrak{H}_t = -\mathfrak{H}_t^0 + \mathfrak{H}_t^0 = 0 \ \text{на } S, \\ H_t &\equiv H_t^0 - \mathfrak{E}_t = H_t^0 \qquad\qquad \text{на } s. \end{aligned}$$

Таким образом, принцип двойственности (2) доказан.

Равенства (2) определяют поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ только в нижнем полупространстве. Чтобы найти также поле в верхнем полупространстве, достаточно проанализировать структуру формул (2). Из нее немедленно следует, что вторые члены формул (2) представляют собой поле, создаваемое в нижнем полупространстве токами, индуцированными на поверхности экрана S.

Так как поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ в верхнем полупространстве складывается из поля источников $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$ и поля токов, индуцированных на поверхности экрана, а последние расположены симметрично относительно обоих полупространств, то на основании только что сказанного можно написать:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(g) &= \vec{E}^0(g) - \vec{\mathfrak{H}}(q), \\ \vec{H}(g) &= \vec{H}^0(g) - \vec{\mathfrak{E}}^*(q). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь g — произвольная точка в верхнем полупространстве, а q — ее зеркальное отображение относительно плоскости $s+S$. Звездочка у вектора $\vec{\mathfrak{E}}$ означает его зеркальное отображение относительно $s+S$.

Таким образом, формулы (2) и (5) определяют связь между полями $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{\mathfrak{E}}$, $\vec{\mathfrak{H}}$ во всем пространстве.

Поступило
7 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Пистолькорс, ЖТФ, **14**, № 12 (1944). [2] М. Леонтович, ЖЭТФ, **16**, № 6 (1946).