Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

ФИЗИКА

Академик В. А. ФОК

О ТОЛКОВАНИИ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ, ОБРАЩЕННОЙ К ПРОШЛОМУ

Физический смысл волновой функции состоит, как известно, в том, что она позволяет вычислять распределения вероятностей результатов будущих измерений. Если волновая функция дана для $t=0$, а искомое распределение вероятностей должно относиться к позднейшему времени $t>0$, то волновая функция должна быть продолжена во времени вперед до момента t. Поэтому волновая функция $\psi(x)$ представляет интерес главным образом тогда, когда она может быть использована в качестве начальных данных. В связи с этим она употребляется главным образом как запись результатов начального опыта (или приготовления объекта). Иначе говоря, обычно она обращена к будущему.

Возникает вопрос, имеет ли смысл волновая функция, обращенная к прошлому. Бывают ли случаи, когда волновая функция используется как запись результатов поверочного опыта, когда она служит для вычисления вероятностей, относящихся к прошлому, и когда имеет смысл продолжать ее по времени назад?

Как указывал акад. Л. И. Мандельштам в своих лекциях, читанных в Московском университете в 1939 г., такой случай может встретиться, например, в теории гейзенберговского микроскопа. Там по месту почернения фотопластинки требуется судить о том, откуда был испущен вызвавший почернение квант или электрон. Так как испускание кванта или отклонение электрона происходит при столкновении его с наблюдаемой частицей, то это дает возможность делать заключение о вероятности того, что наблюдаемая частица находилась в момент столкновения в той или иной точке пространства.

Таким образом, вопрос о вероятностях, относящихся к прошлому, и о продолжении волновой функции во времени назад во всяком случае не лишен физического смысла.

Однако постановка этого вопроса существенным образом отличается от постановки вопросов, относящихся к будущему.

Когда речь идет о вероятностях, относящихся к будущему, о результатах будущих измерений, то не только самые эти результаты не известны наперед, но не предрешено и то, какая именно величина будет измеряться, т. е. не фиксирована и постановка этих измерений. Выбор измеряемой величины и соответственной экспериментальной установки еще не сделан и зависит от нашего произвола.

Напротив, когда речь идет о вероятностях, относящихся к прошлому, то самая постановка вопроса предполагает, что измерения уже произведены, притом произведены при помощи определенной экспериментальной установки, и что результаты их являются определенными, только, быть может, неизвестными. В самом деле, в прошлом ничего изменить нельзя, и единственно возможное сравнение с опытом тех заключений теории, которые относятся к прошлому, состоит в использовании тех данных, которые уже получены, но при выводе теоретических заключений предполагаются неизвестными (т. е. не используются), при сравнении же теории с опытом рассматриваются как известные.

Таким образом, вопрос здесь ставится совершенно так же, как в теории вероятностей, при выводе так называемой теоремы о вероятности гипотез или формулы Байеса. Поэтому эта формула и должна быть положена в основу квантово-механических формул для вероятностей, относящихся к прошлому.

Формула Байеса связывает между собой априорные и апостериорные вероятности для некоторого „события" (в нашем случае — результата измерения).

Пусть поверочный опыт, произведенный в момент времени $t_1 > 0$, дал нам волновую функцию $\psi(x, t_1)$, обращенную к прошлому, т. е. соответствующую тому состоянию, какое было непосредственно до опыта. Эту функцию $\psi(x, t)$ мы можем продолжить во времени назад, вплоть до момента $t = 0$; значение $\psi(x, 0)$ мы обозначим через $\psi(x)$.

Предположим, что мы хотим использовать эту обращенную к прошлому функцию $\psi(x)$ для суждения о том, каково было в момент $t=0$ значение некоторой величины λ (собственные значения λ_l, собственные функции $\varphi_l(x)$). Чтобы придать этому вопросу физический смысл, мы должны предположить, что в момент $t=0$ были в наличии те условия, которые позволили бы судить о величине λ. Мы можем считать, что к этому моменту закончился опыт, состоявший в измерении этой величины, но что результат его известен не полностью. Пусть известно, что с вероятностью w_l^0 получено значение $\lambda = \lambda_l$ (относящееся к моменту времени непосредственно после опыта). Эти данные могут быть записаны в виде оператора Неймана с ядром

$$(x \mid U \mid x') = \sum_l w_l^0 \bar{\varphi}_l(x') \varphi_l(x). \tag{1}$$

Величины w_l^0 можно рассматривать как априорные вероятности, входящие в формулу для вероятности гипотез.

Спрашивается, как изменятся эти априорные вероятности, если использовать тот факт, что позднейший опыт дал нам обращенную к прошлому функцию $\psi(x)$.

Ответ на этот вопрос дается формулой Байеса. Соответствующие апостериорные вероятности будут равны

$$w_l = \frac{w_l^0 b_l}{\sum\limits_j w_j^0 b_j}, \tag{2}$$

где

$$b_l = \left| \int \bar{\varphi}_l(x) \psi(x) \, dx \right|^2 \tag{3}$$

есть вычисляемая по правилам квантовой механики вероятность обнаружить в поверочном опыте состояние $\psi(x)$, когда начальное состояние было $\varphi_l(x)$.

Если бы $\psi(x)$ была функцией, обращенной к будущему, то вероятность результата $\lambda = \lambda_l$ давалась бы формулой (3).

Мы видим, что волновая функция, обращенная к прошлому, входит в выражение для вероятностей иначе, чем входила бы функция, обращенная к будущему. Выражение (2) содержит априорные вероятности, тогда как формула (3) их не содержит.

Выбор априорных вероятностей может представить некоторые трудности. В некоторых случаях можно считать их всех одинаковыми; это соответствует, в известном смысле, размешиванию или усреднению по состояниям, получаемым после измерения величины λ. В предположении, что все w_i^0 равны между собой, величина w_i будет равна b_i, и выражение для вероятностей будет то же, как если бы $\psi(x)$ была волновой функцией, обращенной к будущему.

Иногда условиям задачи более соответствует другое предположение, а именно, что априорные вероятности w_i^0 (относящиеся к значениям величины λ после измерения) совпадают с вероятностями a_i, относящимися к значениям величины λ до измерения и вычисляемыми на основании тех или иных начальных данных. Это будет, в частности, в том случае, когда величина λ есть координата. Если, например, для момента времени $t_0 < 0$ известна волновая функция, обращенная к будущему, и если $\psi_0(x)$ есть результат продолжения этой функции во времени до момента $t=0$, то будет

$$a_i = \left| \int \overline{\varphi}_i(x)\, \psi_0(x)\, dx \right|^2. \tag{4}$$

Предположение, что $w_i^0 = a_i$, приводит тогда к формуле

$$w_i = \frac{a_i b_i}{\sum\limits_j a_j b_j},$$

в которую обе функции ($\psi_0(x)$, обращенная к будущему, и $\psi(x)$, обращенная к прошлому) входят совершенно симметричным образом. Как в том случае, когда $\psi_0(x) = \varphi_k(x)$ и $b_k \neq 0$, так и в том случае, когда $\psi(x) = \varphi_k(x)$ и $a_k \neq 0$, последняя формула дает $w_k = 1$; $w_i = 0$ (при $i \neq k$), т. е. значение $\lambda = \lambda_k$ величины λ известно с достоверностью, как и должно быть. (Если же $\psi_0(x) = \varphi_k(x)$, но $b_k = 0$, или если $\psi(x) = \varphi_k(x)$, но $a_k = 0$, то начальный и поверочный опыты не совместны между собой или же не совместны с предположением, что $w_i^0 = a_i$.)

Формулу (2) нетрудно написать для случая, когда для момента $t_1 > 0$ известна не волновая функция, обращенная к прошлому, а оператор Неймана (также обращенный к прошлому). Но это обобщение не представляет принципиального интереса и на нем мы останавливаться не будем.

Наша цель была показать, что волновая функция, обращенная к прошлому, имеет определенный физический смысл. Соображения, изложенные в настоящей заметке, настолько просты и элементарны, что публикация их нуждается в некотором оправдании. Таким оправданием, быть может, служит то, что в литературе вопрос о физическом смысле волновой функции, обращенной к прошлому, почти не затрагивался, а если и затрагивался, то решался скорее отрицательно [1].

Физический институт
Ленинградского государственного
университета

Поступило
16 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Давыдов, ЖЭТФ, 16, 105 (1946).