Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

К ТЕОРИИ ПАРА- И ОРТО-СОСТОЯНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 7 V 1948)

1. Согласно недавно высказанной гипотезе (1) свободный электрон и позитрон при столкновении, наряду с аннигиляцией, могут также образовывать метастабильную систему (позитроний), состоящую из двух частиц, вращающихся вокруг общего центра тяжести. В атоме позитрония следует различать системы с параллельными (орто-позитроний) и антипараллельными (пара-позитроний) спинами (2).

В связи с тем, что время жизни позитрония должно зависеть от суммарного спина, возник естественный вопрос об исследовании также пара- и орто-состояний системы, состоящей из свободного электрона и позитрона, тем более, что трудная проблема аннигиляции пара- и орто-позитрония может быть сведена к аннигиляции свободных частиц, поскольку энергия связи позитрония во много раз меньше собственной энергии электрона и позитрона.

2. Как было показано в работе одного из нас (3) и В. Кана (4), при исследовании различных спиновых эффектов удобно использовать специальный вид записи уравнения Дирака, в котором произведено в явной форме разделение не только по знаку энергии, но и по спинам.

В качестве спиновой характеристики свободного движения удобнее всего взять проекцию спина на направление движения, поскольку оператор $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})$ является интегралом движения.

Поэтому уравнение Дирака

$$\left(\varepsilon K - i\rho_1\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right) + \rho_3 k_0\right)\psi = 0 \tag{1}$$

дополним еще спиновым уравнением

$$\left(sk + i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\right)\psi = 0. \tag{1a}$$

Здесь величина $\varepsilon = \pm 1$ характеризует знак энергии, а $s = \pm 1$ проекцию спина на направление движения, ρ и σ являются известными матрицами Дирака и, наконец, $m = k_0\hbar / c$ обозначает массу электрона.

При вычислении матричных элементов, в которых должно быть произведено разделение состояний не только по энергиям, но и по спинам, следует вместо формулы Казимира взять выражение, неоднократно использованное одним из нас:

$$\begin{gathered}\psi^+\gamma'\psi'\psi'^+\gamma\psi = \frac{1}{16}\,\mathrm{spur}\,\gamma'\left(1 - \varepsilon'\rho_1\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}')}{K'} - \varepsilon'\rho_3\frac{k_0}{K'}\right)\left(1 + s'\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}')}{k'}\right),\\ \gamma\left(1 - \varepsilon\rho_1\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{k})}{K} - \varepsilon\rho_3\frac{k_0}{K}\right)\left(1 + s\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{k})}{k}\right),\end{gathered} \tag{2}$$

где вместо матриц γ и γ' можно подставлять любые матрицы Дирака*.

3. При вычислении аннигиляции электрона и позитрона представим уравнение Дирака в виде, позволяющем непосредственно (т. е. не вводя промежуточных состояний) вычислять эффекты второго порядка ([5]):

$$D\psi = \frac{1}{c^2\hbar^2} U D^{-1} U \psi, \tag{3}$$

где оператор Дирака

$$D = -\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - i\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right) + \rho_3 k_0,$$

а U — энергия связи электрона с фотонным, т. е. с поперечным электромагнитным полем.

В частности, вычисляя эффективное сечение σ двухфотонной аннигиляции свободного электрона и позитрона в системе, где покоится центр тяжести, мы находим в случае нерелятивистской скорости относительного движения v:

$$\sigma = \frac{\pi}{2}(1 + ss') r_0^2 \frac{c}{v}, \tag{4}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$.

Отсюда вытекает важное следствие, что для орто-состояния ($ss' = -1$) вероятность аннигиляции обращается в нуль. Наоборот, для пара-состояния ($ss' = 1$) вероятность аннигиляции будет в два раза больше известного дираковского результата, вычисленного для произвольной ориентации спинов электрона и позитрона **.

Тогда для определения вероятности аннигиляции позитрония имеем:

$$w = \sigma v \,|\psi(0)|^2, \tag{5}$$

где σ — эффективное сечение аннигиляции свободного электрона и позитрона в системе координат, где покоится центр тяжести, а $\psi(0)$ — шредингеровская волновая функция позитрония в начале координат.

Подставляя сюда

$$|\psi(0)|^2 = \frac{m^3 e^6}{8\pi\hbar^6}, \tag{6}$$

а также принимая во внимание (4), возвращаемся к выведенному в нашей прежней работе ([1]) выражению для вероятности аннигиляции пара-позитрония ($ss' = 1$) ***

$$w = \frac{c k_0 \alpha^5}{8}, \tag{7}$$

тогда как вероятность двухфотонной аннигиляции орто-позитрония ($ss' = -1$) обращается в нуль.

---

* Суммируя выражение (2) по спиновым индексам, мы получим известную формулу Казимира.

** Некоторое время тому назад эффективное сечение для аннигиляции электрона и позитрона с фиксированным направлением спина и обладающими релятивистскими скоростями было вычислено А. И. Мухтаровым, продолжавшим наши работы с позитронием.

*** Позднее И. Я. Померанчук ([6]) вычислил время аннигиляции пара-позитрония, допустив, однако, при определении численного коэффициента (не меняющего, впрочем, порядок результата) две ошибки. Во-первых, он принял, что вероятность аннигиляции свободного электрона и позитрона не в два, а в четыре раза больше соответствующего усредненного по спинам значения и во-вторых, в его формуле подставлено эффективное сечение для аннигиляции частиц в системе координат, где покоится электрон, в то время как значение $|\psi(0)|^2$ взято в системе координат, где покоится центр тяжести позитрония.

4. Для того чтобы определить время жизни орто-позитрония, удобно прежде всего найти эффективное сечение распада свободной орто-системы на три фотона.

Преобразуя снова уравнение Дирака к виду, позволяющему непосредственно вычислять эффекты третьего порядка:

$$D\psi = \frac{1}{c^3 h^3} U D^{-1} U D^{-1} U \psi, \tag{8}$$

найдем для искомого эффективного сечения ($ss' = -1$)

$$\sigma = \frac{8}{9} \alpha \frac{c}{v} r_0^2 J, \tag{9}$$

где

$$J = \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{(1 - x_1 - x_2)^2}{x_1^2 x_2^2}.$$

Интегрирование по обеим переменным производится элементарно. В результате получаем для искомого эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{8}{27} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{c}{v} r_0^2 \sim 0{,}26\, \alpha \frac{c}{v} r_0^2. \tag{10}$$

Отсюда видно, что эффективное сечение аннигиляции орто-системы на три фотона, грубо говоря, в $\frac{1}{\alpha} = 137$ раз меньше эффективного сечения распада пара-системы на два фотона ([2]) *.

Пренебрегая релятивистскими эффектами при движении частиц в атоме позитрония, мы можем с помощью формулы (5) определить время жизни орто-позитрония, которое из-за малого численного коэффициента оказывается примерно $1{,}7 \cdot 10^3$ раз больше времени жизни пара-позитрония. Аналогичные соображения могут быть, очевидно, применимы также к трактовке пара- и орто-систем других элементарных частиц.

Физический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко и А. Соколов, Вестн. МГУ, № 6, 3 (1947). [2] Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, **58**, 1329 (1947). [3] A. Sokolow, J. of Phys., **9**, 363 (1945). [4] В. Кан, ДАН, **50**, 139 (1945). [5] A. Sokolow, J. of Phys., **5**, 231 (1941). [6] И. Померанчук, ДАН, **60**, 213 (1947). [7] Е. Лифшиц, ДАН, **60**, 211 (1947).

* Недавно Е. М. Лифшиц ([7]) нашел значение для эффективного сечения с той же зависимостью от постоянных α, c, v и r_0^2, как и в формуле (10), но с численным коэффициентом примерно в десять раз большим. Расхождение в численном коэффициенте, повидимому, связано с принципиальной ошибкой, допущенной Померанчуком-Лифшицем при разделении пара- и орто-состояний в системе, состоящей из двух различных частиц.