Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. М. ФРИДМАН

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ЩЕЛИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 IV 1948)

В работе дано решение двухмерной задачи дифракции неустановившейся плоской, продольной или поперечной, упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели.

Решение задачи удалось получить благодаря применению, с одной стороны, метода академиков В. И. Смирнова и С. Л. Соболева функционально-инвариантных решений волнового уравнения и, с другой стороны, результатов академика Н. И. Мусхелишвили по теории сингулярных интегральных уравнений.

В работе рассматривается двухмерная задача дифракции элементарной плоской, продольной или поперечной, упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели. Решение двухмерной задачи дифракции неустановившейся плоской упругой волны получается простым наложением решений для элементарных волн.

1. Рассмотрим упругую плоскость xy, в которой сделан разрез вдоль луча $y=0$, $x\geqslant 0$. Берега разреза предполагаются жестко закрепленными. В упругой плоскости распространяется элементарная плоская продольная волна

$$u = c\, s(t - cx + \sqrt{a^2-c^2}\, y),$$
$$v = \sqrt{a^2-c^2}\, s(t - cx + \sqrt{a^2-c^2}\, y), \tag{1,1}$$

фронт которой при $t<0$ не пересекается с разрезом, а в момент времени $t=0$ доходит до начала разреза. Здесь: $1/a$—скорость распространения фронта продольной волны; $1/b$—скорость распространения фронта поперечной волны; c — вещественная постоянная, $0<c<a$; $s(\xi)$—разрывная функция, равная единице при $\xi\geqslant 0$ и равная нулю при $\xi<0$. Таким образом, при $t<0$ впереди фронта волны покой: $u=0$, $v=0$; за фронтом волны: $u=-c$, $v=\sqrt{a^2-c^2}$.

Требуется определить вектор упругих смещений $\bar{u}(x,y,t)$ в любой момент времени $t>0$.

Представим вектор $\bar{u}(x,y,t)$ в виде суммы $\bar{u}(x\, y,t)=\bar{u}_1(x,y,t)+\bar{u}_2(x,y,t)$, где $\bar{u}_1(x,y,t)$—вектор продольных смещений и $\bar{u}_2(x,y,t)$—вектор поперечных смещений. Пусть $u_1(x,y,t)$ и $v_1(x,y,t)$ — составляющие вектора $\bar{u}_1(x,y,t)$; $u_2(x,y,t)$ и $v_2(x,y,t)$ — составляющие вектора $\bar{u}_2(x,y,t)$.

Будем искать решение задачи дифракции, взяв за функции $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$ и $v_2(x, y, t)$ однородные функции нулевого измерения относительно переменных x, y, t.

Однородные функции $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$ и $v_2(x, y, t)$, являясь обобщенными решениями волнового уравнения, могут быть представлены в виде [1]:

$$\begin{aligned} &u_1(x, y, t) = \operatorname{Re} U_1(\theta_1), \quad v_1(x, y, t) = \operatorname{Re} V_1(\theta_1), \\ &u_2(x, y, t) = \operatorname{Re} U_2(\theta_2), \quad v_2(x, y, t) = \operatorname{Re} V_2(\theta_2). \end{aligned} \tag{1,2}$$

$$t - \theta_1 x - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\, y = 0, \quad t - \theta_2 x - \sqrt{b^2 - \theta_2^2}\, y = 0, \tag{1,3}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 - \theta_1^2}\, U_1'(\theta_1) - \theta_1 V_1'(\theta_1) = iC_1, \\ &\theta_2 U_2'(\theta_2) + \sqrt{b^2 - \theta_2^2}\, V_2'(\theta_2) = iC_2; \end{aligned} \tag{1,4}$$

C_1 и C_2 — вещественные постоянные.

Функции $U_1(\theta_1)$ и $V_1(\theta_1)$ голоморфны в плоскости комплексного переменного $\theta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, разрезанной вдоль луча $\xi_1 > -a$. Функции $U_2(\theta_2)$ и $V_2(\theta_2)$ голоморфны в плоскости комплексного переменного $\theta_2 = \xi_2 + i\eta_2$, разрезанной вдоль луча $\xi_2 > -b$.

Функции $U_1(\theta_1), V_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$, $V_2(\theta_2)$ при достаточно больших по модулю значениях, соответственно, θ_1 и θ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} U_1(\theta_1) &= \quad (A\theta_1 + B)\sqrt{b + \theta_1} + U_{10}(\theta_1), \\ V_1(\theta_1) &= -(A\theta_1 + B)\, i\sqrt{b + \theta_1} + V_{10}(\theta_1), \\ U_2(\theta_2) &= -(A\theta_2 + B)\sqrt{b + \theta_2} + U_{20}(\theta_2), \\ V_2(\theta_2) &= \quad (A\theta_2 + B)\, i\sqrt{b + \theta_2} + V_{20}(\theta_2). \end{aligned} \tag{1,5}$$

Здесь A и B — комплексные постоянные и $U_{10}(\theta_1), V_{10}(\theta_1), U_{20}(\theta_2)$, $V_{20}(\theta_2)$ — ограниченные функции.

При сделанных предположениях относительно функций $U_1(\theta_1)$, $V_1(\theta_1)$, $U_2(\theta_2), V_2(\theta_2)$ задача дифракции имеет единственное решение.

Функции $U_1(\theta_1)$, $V_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$, $V_2(\theta_2)$ удовлетворяют следующим краевым условиям на верхнем и нижнем берегах разреза плоскостей θ_1 и θ_2

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} U_1^+(\xi_1) = p, \ \operatorname{Re} U_1^-(\xi_1) = p, \ \operatorname{Re} V_1^+(\xi_1) = q, \ \operatorname{Re} V_1^-(\xi_1) = q \\ (-a < \xi_1 < +c); \\ \operatorname{Re} U_1^+(\xi_1) = p', \quad \operatorname{Re} U_1^-(\xi_1) = 0, \ \operatorname{Re} V_1^+(\xi_1) = q', \quad \operatorname{Re} V_1^-(\xi_1) = 0 \\ (+c < \xi_1 < +a); \\ \operatorname{Re}[U_1^+(\xi) + U_2^+(\xi)] = \operatorname{Re}[U_1^-(\xi) + U_2^-(\xi)] = 0, \\ \operatorname{Re}[V_1^+(\xi) + V_2^+(\xi)] = \operatorname{Re}[V_1^-(\xi) + V_2^-(\xi)] = 0 \\ (+a < \xi < +\infty); \\ \operatorname{Re} U_2^+(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} U_2^-(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^+(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^-(\xi_2) = 0 \\ (-b < \xi_2 < +c); \\ \operatorname{Re} U_2^+(\xi_2) = -p', \ \operatorname{Re} U_2^-(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^+(\xi_2) = -q', \ \operatorname{Re} V_2^-(\xi_2) = 0 \\ (+c < \xi_2 < +a). \end{gathered} \tag{1,6}$$

Здесь:

$$p = -c, \qquad q = \sqrt{a^2 - c^2};$$

$$p' = -c\,\frac{2\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{c^2 + \sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}}, \quad q' = \sqrt{a^2 - c^2}\,\frac{2c^2}{c^2 + \sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

2. Продолжим разрез в плоскости θ_1 вдоль вещественной оси на отрезке $-b<\xi_1<-a$, Пусть:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} U_1^{+}(\xi_1)=\operatorname{Re} U_1^{-}(\xi_1)=f_1(\xi_1),\\ \operatorname{Re} V_1^{+}(\xi_1)=\operatorname{Re} V_1^{-}(\xi_1)=f_2(\xi_1)\ (-b<\xi_1<-a).\end{gathered} \tag{2,1}$$

Здесь $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_1)$ — неизвестные функции.
Функции

$$U(\theta)=U_1(\theta)+U_2(\theta),\quad V(\theta)=V_1(\theta)+V_2(\theta) \tag{2,2}$$

голоморфны в плоскости комплексного переменного $\theta=\xi+i\eta$, разрезанной вдоль луча $\xi>-b$, и ограничены на бесконечности. Краевые условия для функций $U(\theta)$ и $V(\theta)$ очевидны. Функции $U(\theta)$ и $V(\theta)$ определяются непосредственно.

Далее, из системы четырех алгебраических уравнений (1,4) и (2,2), приняв во внимание (1,5), определяем функции

$$\begin{aligned} U_1'(\theta)&=\theta\, S(\theta), & V_1'(\theta)&=\sqrt{a^2-\theta^2}\, S(\theta),\\ U_2'(\theta)&=\sqrt{b^2-\theta^2}\, T(\theta), & V_2'(\theta)&=-\theta\, T(\theta).\end{aligned} \tag{2,3}$$

Здесь:

$$S(\theta)=\frac{\theta U'(\theta)+\sqrt{b^2-\theta^2}\, V'(\theta)}{\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}},\ T(\theta)=\frac{\sqrt{a^2-\theta^2}\, U'(\theta)-\theta\, V'(\theta)}{\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}; \tag{2,4}$$

$$U'(\theta)=\frac{p\sqrt{b+c}}{\pi i(\theta-c)\sqrt{b+\theta}}+\frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{b+\theta}},\ V'(\theta)=\frac{q\sqrt{b+c}}{\pi i(\theta-c)\sqrt{b+\theta}}+\frac{\Psi(\theta)}{\sqrt{q+\theta}}; \tag{2,5}$$

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{-b}^{-a}\sqrt{b+\xi}\, f_1'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-\theta}\cdot\ \Psi(\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{-b}^{-a}\sqrt{b+\xi}\, f_2'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-\theta}\cdot \tag{2,6}$$

3. $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ кусочно-голоморфные функции, равные на бесконечности нулю. Условия аналитического продолжения функций $U_1(\theta)$ и $V_1(\theta)$ через отрезок $-b<\xi<-a$ вещественной оси приводят к двум неоднородным задачам Гильберта для функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$:

$$\Phi^{+}(\xi)=-G(\xi)\,\Phi^{-}(\xi)+g(\xi)\qquad(-b<\xi<-a); \tag{3,1}$$

$$\Psi^{+}(\xi)=G(\xi)\,\Psi^{-}(\xi)+g_1(\xi)\qquad(-b<\xi<-a). \tag{3,2}$$

Здесь:

$$G(\xi)=\frac{\xi^2+\sqrt{a^2-\xi^2}\,\sqrt{b^2-\xi^2}}{\xi^2-\sqrt{a^2-\xi^2}\,\sqrt{b^2-\xi^2}}; \tag{3,3}$$

$$g(\xi)=-\frac{2p\sqrt{b+c}}{\pi i(\xi-c)}\,\frac{\xi^2}{\xi^2-\sqrt{a^2-\xi^2}\,\sqrt{b^2-\xi^2}},$$

$$g_1(\xi)=\frac{2q\sqrt{b+c}}{\pi i(\xi-c)}\,\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}\,\sqrt{b^2-\xi^2}}{\xi^2-\sqrt{a^2-\xi^2}\,\sqrt{b^2-\xi^2}}\cdot \tag{3,4}$$

Неоднородная задача Гильберта (3,1) имеет единственное решение, исчезающее на бесконечности. Это решение дается формулой ([2]):

$$\Psi(\theta)=\frac{Y(\theta)}{2\pi i}\int_{-b}^{-a}\frac{g_1(\xi)\,d\xi}{Y^+(\xi)(\xi-\theta)}, \tag{3,5}$$

$$Y(\theta)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-b}^{-a}\lg G(\xi)\frac{d\xi}{\xi-\theta}\right\}. \tag{3,6}$$

Решение (3,5) ограничено в окрестности концов $\theta=-b$ и $\theta=-a$.

Неоднородная задача Гильберта (3,2) допускает семейство решений, равных на бесконечности нулю.

Согласно условиям задачи функции $U_1'(\theta_1)$ и $V_1'(\theta_1)$ должны быть голоморфными в плоскости θ_1, разрезанной вдоль луча $\xi_1>-a$ вещественной оси. Построенные нами функции $U_1'(\theta)$ и $V_1'(\theta_1)$ голоморфны в плоскости θ_1, исключая, быть может, точку $\theta_1=-b$. Требование голоморфности функций $U_1'(\theta_1)$ и $V_1'(\theta_1)$ в точке $\theta_1=-b$ определяет единственное решение задачи (3,2), исчезающее на бесконечности. Это решение равно:

$$\Phi(\theta)=\frac{\sqrt{b+\theta}}{\sqrt{a+\theta}}\,\frac{Y(\theta)}{2\pi i}\int_{-b}^{-a}\frac{\sqrt{a+\xi}}{\sqrt{b+\xi}}\,\frac{g(\xi)\,d\xi}{Y^+(\xi)(\xi-\theta)}. \tag{3,7}$$

Тем же методом может быть получено решение двухмерной задачи дифракции элементарной плоской поперечной волны

$$u=\sqrt{b^2-c^2}\,s(t-cx+\sqrt{b^2-c^2}\,y),\quad v=c\,s(t-cx+\sqrt{b^2-c^2}\,y)$$

относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели $y=0$, $x\geqslant 0$, когда угол падения волны не превышает угла полного внутреннего отражения ($0<c<a<b$).

Автор выражает искреннюю благодарность проф. С. Г. Михлину за сделанные им при выполнении настоящей работы указания.

Поступило
2 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. XII, 1937. [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.