Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ, ПРЕВОСХОДЯЩИХ ПРЕДЕЛ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 20 XI 1947)

В настоящей заметке мы выясняем возможности построения теории, охватывающей упругую область и позволяющей приближенно определять равновесные состояния за пределами пропорциональности в области, которую условно можно назвать пластической.

Предлагаемая теория является статической и поэтому не претендует на полное описание пластических явлений. Так же как и в ряде обычных для сопротивления материалов приближенных теорий пластичности, мы, в сущности, вместо пластических процессов рассматриваем упругие процессы, связанные с резким изменением упругих характеристик, но в то время как эти теории строятся только для одномерных задач, мы в настоящей заметке рассматриваем общий случай.

Рассмотрим деформацию элемента объема, в котором направление осей координат совпадает с главными осями деформации. Зададимся уравнением, связывающим главные напряжения, отнесенные к величинам первоначальных площадей, и главные удлинения:

$$\overline{\sigma}_i = F(e_i, S_1, S_2, S_3), \tag{1}$$

где

$$S_1 = e_1 + e_2 + e_3,$$
$$S_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1,$$
$$S_3 = e_1 e_2 e_3.$$

Если ограничиваться только квадратичными членами относительно удлинений, то можно написать [1]:

$$\overline{\sigma}_i = 2\mu e_i + \lambda S_1 + A e_i^2 + B S_1^2 + C(e_i S_1 - S_2), \tag{2}$$

откуда вытекают следующие зависимости между напряжениями и компонентами деформации, отнесенными к деформированному состоянию в произвольных координатных осях:

$$\sigma_{ij} = \left\{\lambda J_1 + \left(B + \frac{\lambda}{2}\right) J_1^2 - (C + 3\lambda) J_2\right\} \delta_{ij} +$$
$$+ [2\mu - (C + \lambda - 2\mu) J_1] \varepsilon_{ij} + (A + 5\mu)[\varepsilon_{ij}(\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}) + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}], \tag{3}$$

здесь J_1 и J_2, а в дальнейшем также J_3 — инварианты тензора деформации

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}.$$

В пространстве $(\bar{\sigma}_i, e_1, e_2, e_3)$ уравнения (1) представляют некоторые гиперповерхности. Для простоты изложения мы выделим случай $e_3=0$, уменьшив таким образом число измерений, однако все, что будет сказано ниже, применимо и в общем случае.

При $e_3=0$ уравнение (1) представляет поверхность, которую мы будем называть поверхностью Гука; при $A=B=C=0$ эта поверхность переходит в плоскость

$$\bar{\sigma}_i=2\mu e_i+\lambda S_1. \tag{4}$$

Случаю плоскости в пространстве $(\bar{\sigma}_i, e_1, e_2)$ все же соответствуют квадратичные зависимости (3), остающиеся квадратичными и при $A=B=C=0$; вследствие этого методы, развитые в ряде работ (например [1–3]) для решения задач теории упругости с квадратичными членами, справедливы как в случае плоскости Гука (уравнение (4)), так и в случае параболоида Гука (уравнение (2)).

Уравнения (2) или (4) приближенно справедливы в ограниченной области, определяемой тем или иным условием пластичности.

Обычно эти условия формулируются для напряжений, но при наличии соотношений (1)—(4) легко выразить их через главные удлинения либо через компоненты деформаций.

В общем виде мы будем иметь условие пластичности в виде $M(e_1, e_2, e_3)\leqslant k$. В частности, если принять гипотезу Генки, то M есть плотность энергии изменения формы u

$$M=M'(J_1, J_3, J_3).$$

Равенство $M'=M=k$ определяет в пространстве $(\bar{\sigma}_i, e_1, e_2, e_3)$ гиперцилиндр, переходящий в обычный цилиндр при $e_3=0$.

При достижении деформациями границ цилиндра происходит резкое изменение упругих свойств материалов, и, описывая упругие свойства тела, мы должны перейти к другой поверхности Гука. Новую поверхность мы также можем представить параболоидом

$$\bar{\sigma}_i=a+2\mu' e_i+\lambda' S_1+A' e_i^2+B' S_1^2+C'(S_1 e_i-S_2) \tag{5}$$

либо плоскостью

$$\bar{\sigma}_i=a+2\mu' e_i+\lambda' S_1. \tag{6}$$

Мы будем рассматривать условия пластичности либо типа условий Сен-Венана, либо типа Мизеса—Генки.

В первом случае мы ограничим величины, характеризующие углы сдвига, а именно, мы потребуем, чтобы

$$\max\left\{\begin{array}{c}|e_1-e_2|\\ |e_2-e_3|\\ |e_3-e_1|\end{array}\right\}\leqslant k. \tag{7}$$

Соответствующая поверхность (в пространстве $(\bar{\sigma}_i, e_1, e_2, e_3)$) состоит из ряда плоскостей.

При использовании условий пластичности типа Мизеса—Генки, соответствующая поверхность представляет цилиндр с криволинейной образующей второго или третьего порядка

$$M'(S_1, S_2, S_3) = k. \tag{8}$$

Очевидно, что этот цилиндр пересекается с плоскостью Гука по кривой, что делает невозможным сопряжение двух плоскостей Гука.

Мы должны сопрягать поверхность (2) вдоль линии ее пересечения с цилиндром с поверхностью (5) либо с плоскостью (6). Последний случай представляет аналог обычной теории пластичности с линейным упрочнением. Можно также сопрягать плоскость (4) с поверхностью (5). Наличие дополнительных упругих констант дает возможность не только выполнить требуемое сопряжение, но и оставляет достаточно свободы для приближенного изображения экспериментально определяемых упругих характеристик тела.

Для определения равновесного состояния мы приходим к задаче теории упругости с квадратичными членами для составного тела с различными модулями. Задачи такого типа решались в работе ([4]) методами, изложенными в работах ([1–3]). В предлагаемой теории сохраняется специфическая трудность задач определения упруго-пластического равновесия, связанная с неизвестностью границы между упругой и пластической зонами.

Заметим, наконец, что так же как и теория Генки предлагаемая теория не описывает ряда явлений, связанных с изменением направления загружения, последействия и т. д., и не охватывает динамики пластических состояний.

Поступило
20 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. В. Зволинский и П. М. Риз, Прикладн. математ. и мех., 2, в. 4 (1939). [2] Д. Ю. Панов, Тр. ЦАГИ, в. 479 (1940). [3] П. М. Риз, ДАН, 22, № 9 (1939). [4] А. Горгидзе и А. К. Рухадзе. Тр. Тбилисск. математ. ин-та, 12, 79 (1943).