Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 2

МЕХАНИКА

В. А. ФЛОРИН

ЗАДАЧА КОНСОЛИДАЦИИ ЗЕМЛЯНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 12 IX 1947)

Основное уравнение консолидации водонасыщенной земляной среды с учетом защемленного газа, как было нами показано ранее ([1]), может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\beta\frac{\partial p}{\partial t}-\operatorname{div} k \operatorname{grad} H=0, \tag{1}$$

где ε — коэффициент пористости грунта; β — коэффициент объемного сжатия газообразной фазы, относя последнее к единице объема земляной среды; p — превышение давления в жидкой фазе над атмосферным; k — коэффициент фильтрации и H — гидродинамический напор.

При определении входящей в уравнение (1) величины $\partial\varepsilon/\partial t$ можно с достаточным для целей практики приближением полагать, что величина коэффициента пористости ε определяется величиной суммы главных напряжений Θ в любой точке скелета грунта, т. е. $\varepsilon=\varepsilon(\Theta)$, откуда:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

где $\partial\varepsilon/\partial\Theta$ является экспериментальной характеристикой скелета грунта, получаемой в результате компрессионных испытаний.

В отношении деформационных свойств скелета грунта в нашей работе ([2]) мы полагали, что они могут быть представлены расчетной моделью линейно деформируемой среды. Однако в ряде случаев, особенно, когда области пластических деформаций, возникающие в земляной среде, могут быть достаточно велики, такая расчетная модель мало удовлетворительна. Поэтому мы воздерживаемся здесь от принятия такой модели и, в частности, от введения в основные уравнения закона Гука, и для общности не приписываем скелету грунта каких-либо определенных деформационных свойств.

При установлении соответствующей расчетной модели мы принимаем следующие основные положения:

1. Расчетная модель для нестабилизированного состояния должна быть такой, чтобы получаемое напряженное состояние скелета грунта для нестабилизированного состояния в пределе при затухании процесса консолидации совпадало бы с напряженным состоянием, принятым для стабилизированного напряженного состояния.

2. Касательные напряжения могут возникать только в скелете грунта (относя к нему и жидкость в весьма тонких промежутках между зернами скелета грунта, обладающую особыми свойствами),

тогда как нормальные напряжения, действующие по какой-либо площадке, могут передаваться как скелетом грунта, так и заполняющей его поры жидкостью.

Предположим, что к земляной среде приложена переменная во времени уплотняющая нагрузка, обусловленная приложением каких-либо внешних нагрузок или объемных сил или же изменением напорного режима вследствие изменения граничных значений напорной функции. Обозначим индексом * напряженное состояние, которое возникло бы в земляной среде в любой момент времени в случае „мгновенной“ консолидации, т. е. если бы заполняющая поры скелета грунта жидкость не препятствовала возникновению деформаций объема, т. е. изменению объема пор.

Тогда, при изменении напряженного состояния земляной среды, обусловленном изменением уплотняющей нагрузки, можно принять, что касательные напряжения для любого момента времени сразу же достигают своей окончательной величины, соответствующей индексу *, так как заполняющая поры скелета грунта жидкость не препятствует возникновению деформаций сдвига. Нормальные же напряжения передаются частично скелетом грунта, частично же жидкостью, причем соотношение этих частей по мере изменения давления в жидкости постепенно изменяется. Это соответствует тому, что во всех точках среды на напряженное состояние с индексом * налагается переменное во времени всестороннее растяжение $p-p^*$, в результате чего напряжения в скелете грунта для любого момента времени могут быть приняты в виде:

$$X_x=X_x^*-(p-p^*),\ \ldots,\ X_y=X_y^*,\ \ldots \tag{2}$$

$$\Theta=\Theta^*-3(p-p^*), \tag{3}$$

где Θ обозначает сумму главных напряжений в скелете грунта; p^* — превышение давления в воде над атмосферным для стабилизированного состояния при соответствующих рассматриваемому моменту времени граничных значениях функции p.

Нетрудно показать, что выражения (2) удовлетворяют уравнениям равновесия, полагая, как обычно, собственный вес земляной среды постоянным.

Выражения (2) определяют напряженное состояние скелета, если только изменение функции p во времени для любой точки земляной среды известно.

Для определения функции p, учитывая зависимость (3), можно представить основное уравнение консолидации (1) в виде:

$$\left[1-\frac{\beta(1+\varepsilon)}{3\ \partial\varepsilon/\partial\Theta}\right]\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}-\frac{\partial p^*}{\partial t}=-\frac{1+\varepsilon}{3\ \partial\varepsilon/\partial\Theta}\operatorname{div} k\operatorname{grad} H.$$

Учитывая, вследствие несжимаемости жидкой фазы, известную зависимость:

$$H=\frac{p}{\gamma}+z, \tag{4}$$

можно, вводя обозначение

$$\omega=1-\frac{\beta(1+\varepsilon)}{3\ \partial\varepsilon/\partial\Theta}, \tag{5}$$

представить уравнение консолидации в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{3\gamma\omega}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial H^*}{\partial t}-\frac{1+\varepsilon}{3\gamma\omega\ \partial\varepsilon/\partial\Theta}\operatorname{div} k\operatorname{grad} H. \tag{6}$$

В общем случае величина ω изменяется при изменении величин p и $\partial\varepsilon/\partial\Theta$, а следовательно, зависит и от величины Θ. При численном решении она может быть без затруднения принята различной для различных узлов сетки. Однако при небольшом диапазоне изменения входящих в нее величин она может быть приближенно принята постоянной и равной своему среднему на рассматриваемом диапазоне значению. Кроме того, в соответствии с обычным при решении одноразмерной задачи двухфазной системы допущением, входящая в выражения (5) и (6) величина $1+\varepsilon$ может быть в большем числе случаев со вполне достаточным для целей практики приближением заменена величиной $1+\varepsilon_{\text{ср}}$.

Характеристика земляной среды $\partial\varepsilon/\partial\Theta$ должна вводиться в расчет, определяя ее для каждого значения Θ. Однако обычно в механике грунтов, а также и во всех решениях одноразмерной задачи двухфазной системы действительная зависимость между коэффициентом пористости и уплотняющей в компрессионном приборе нагрузкой на рассматриваемом диапазоне изменения действующих в скелете грунта напряжений заменяется линейной.

Коэффициент фильтрации, вообще говоря, должен, а при численном решении может приниматься переменным даже для однородной и изотропной земляной среды, так как он зависит от объема пор, а следовательно, и суммы действующих в скелете грунта нормальных напряжений.

В таком случае, учитывая зависимости: $k=k(\varepsilon)$, $\varepsilon=\varepsilon(\Theta)$ и $\Theta=\Theta^*-3\gamma(H-H^*)$, уравнение (6) можно представить в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{3\gamma\omega}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial H^*}{\partial t}-(1+\varepsilon)\frac{\partial k}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{3\gamma}(\operatorname{grad}\Theta^*,\ \operatorname{grad}H)-\right.$$

$$\left.-|\operatorname{grad}H|^2+(\operatorname{grad}H,\ \operatorname{grad}H^*)\right]-\frac{(1+\varepsilon)\,k}{3\gamma\omega\,\partial\varepsilon/\partial\Theta}\nabla^2H,$$

где $\partial k/\partial\varepsilon$ определяется из экспериментальных исследований для различных ε или Θ. Однако во всех решениях одноразмерной задачи двухфазной системы коэффициент фильтрации принимался всегда постоянным и равным своей средней величине.

Необходимые для решения задачи начальное и граничные условия могут быть установлены следующим образом. Если в момент времени $t=0$ внезапно приложить некоторую уплотняющую нагрузку, то в течение достаточно малого промежутка времени после приложения уплотняющей нагрузки водосодержание в порах измениться не может, так как приток или отток жидкости требует некоторого времени, определяемого величиною коэффициента фильтрации. Для случая неизменного водосодержания уравнение (6) имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{3\gamma\omega}\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial p^*}{\partial t}.$$

Отсюда для двух сколь угодно близких моментов времени, до и после приложения нагрузки, получаем:

$$H_{+0}-H_{-0}=\frac{1}{3\gamma\omega}(\Theta^*_{+0}-\Theta^*_{-0})+\frac{1}{\omega}(H^*_{+0}-H^*_{-0}).$$

В случае двухфазной системы ($\omega=1$) и отсутствия изменения в момент $t=0$ граничных значений напорной функции, вследствие чего $H^*_{+0}=H^*_{-0}$, имеем:

$$H_{+0}=H_{-0}+\frac{1}{3\gamma}(\Theta^*_{+0}-\Theta^*_{-0}).$$

Граничные условия не отличаются от обычных в теории фильтрации.

Численное решение поставленной таким образом задачи производится в конечных разностях без затруднений. В настоящее время нами получено большое число решений в предположении любого

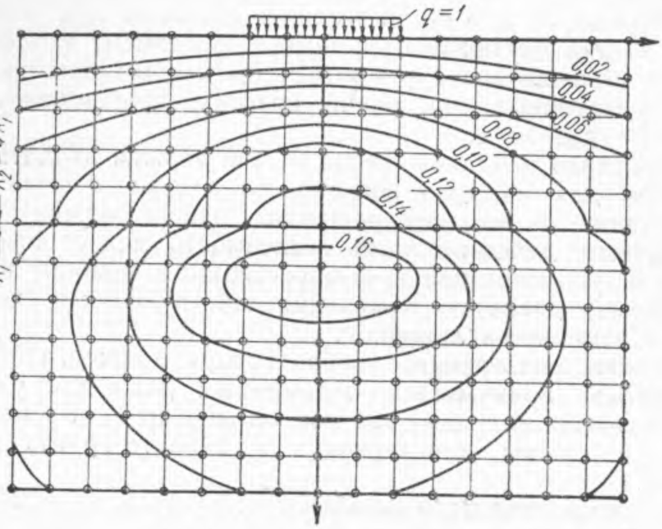

Рис. 1

заданного вида постоянной для изменяющейся во времени граничной поверхности области уплотнения, изменяющейся во времени по произвольному закону уплотняющей нагрузки, с учетом неоднородности

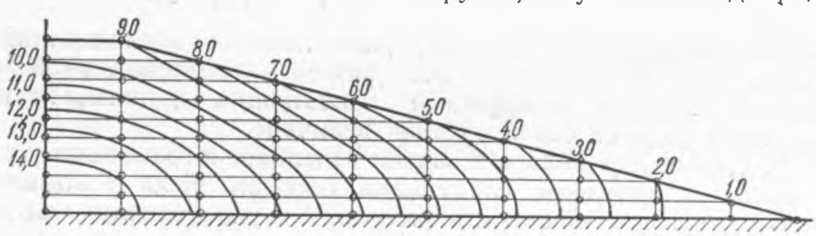

Рис. 2

или анизотропии среды, в предположении как постоянных во времени, так и переменных в зависимости от координат и напряженного состояния характеристик грунта. На рис. 1 и 2 приведены для иллюстрации линии равных напоров в двухслойном основании сооружения и теле земляной плотины с учетом постепенности ее возведения.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники

Поступило
12 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Флорин, ДАН, 59, № 1 (1948). [2] В. А. Флорин, Изв. ВНИИГ, 25 (1939).