Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Я. ХИНЧИН

ТЕОРЕМА ПЕРЕНОСА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно из элементов теории диофантовых приближений, система линейных однородных уравнений

$$L_j = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{1}$$

где θ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — данные вещественные числа, при любом $t \geqslant 1$ допускает приближенные целочисленные решения x_i, y_j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > 0, \quad |L_j| < \frac{1}{t}, \quad |x_i| \leqslant t^{n/m} \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

В случае, если при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом t существуют целые x_i, y_j, удовлетворяющие более точным неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > 0, \quad |L_j| < \frac{1}{t}, \quad |x_i| < \varepsilon t^{n/m} \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n),$$

я предложил называть систему (1) *сингулярной*; всякая не сингулярная система называется *регулярной*. Разделение систем вида (1) на регулярные и сингулярные имеет, как было показано мной и другими авторами, существенное значение для исследования систем неоднородных уравнений. До сих пор рассматривались почти исключительно случаи $n=1$ и $m=1$ (см., однако, работу Ярника ([1])).

Теоремами переноса (Übertragungssätze) в теории диофантовых приближений называют предложения, позволяющие от какой-либо закономерности в приближенном целочисленном решении системы (1) заключать к некоторой закономерности, относящейся к „транспонированной" системе

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} u_j - v_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{2}$$

После того, как мною ([2]) в 1926 г. была доказана первая такая теорема переноса, последовал ряд работ других авторов, относящихся к этому кругу вопросов. В 1939 г. Малером ([3]) была доказана весьма общая теорема, охватывавшая в качестве частных случаев все известные до сих пор теоремы переноса, а также некоторые новые. В частном случае $n=1$ (или $m=1$) с помощью теоремы Малера можно легко доказать, что сингулярность системы (1) равносильна сингулярности системы (2); однако в общем случае произвольных n и m такое доказательство, повидимому, не удается; между тем, именно это свойство сингулярных систем имеет значение для исследования неоднородных задач, в частности — для обобщенной задачи Чебышева, которой я имею в виду посвятить другую работу. Здесь же я приведу найденное мною простое доказательство общей теоремы переноса для сингулярных систем, основанное на методе „добавочной переменной“, с успехом применявшемся Морделлом к решению некоторых неоднородных задач.

Теорема. *Если система* (1) *сингулярна, то сингулярна и система* (2).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, и пусть $\eta > 0$ столь мало, что

$$4(m\eta)^{\frac{n}{n+m}}(n\varepsilon)^{\frac{n}{n+m}} < \varepsilon^n. \tag{3}$$

Пусть, далее, t — произвольное положительное число; положим

$$T = \left(\frac{n\varepsilon}{m\eta}\right)^{\frac{n}{n+m}} t^{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

В силу предположенной сингулярности системы (1) целые числа x_i, y_j могут быть, если t достаточно велико, выбраны так, что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > 0, \quad |L_j| < \frac{1}{T}, \quad |x_i| < \eta T^{n/m} \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n). \tag{5}$$

Пусть, для определенности, $x_1 \neq 0$. В силу теоремы Минковского о линейных формах, целые числа u_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$, v_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ могут быть выбраны так, что

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} u_j^2 > 0, \quad \left|M_1 - \frac{\varepsilon^n}{2x_1}u_0\right| < \frac{1}{t}, \quad |M_i| < \frac{1}{t} \quad (2 \leqslant i \leqslant m), \\ &|u_0| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n}, \quad |u_j| < \varepsilon t^{m/n} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Так как непосредственный подсчет дает

$$\sum_{i=1}^{m} x_i M_i - \sum_{j=1}^{n} u_j L_j = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j - \sum_{i=1}^{m} x_i v_i = z,$$

где z — целое число, то

$$z - u_0\frac{\varepsilon^n}{2} = x_1\left(M_1 - \frac{\varepsilon^n}{2x_1}u_0\right) + \sum_{i=2}^{m} x_i M_i - \sum_{j=1}^{n} u_j L_j,$$

и, следовательно, в силу (5), (6), (4), (3),

$$\left|z - u_0\frac{\varepsilon^n}{2}\right| < m\eta\frac{T^{n/m}}{t} + n\varepsilon\frac{t^{n/m}}{T} = 2(n\varepsilon)^{\frac{n}{n+m}}(m\eta)^{\frac{m}{n+m}} < \frac{\varepsilon^n}{2}. \tag{7}$$

Но в силу $|u_0| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n}$ мы имеем $\left|u_0\frac{\varepsilon^n}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому, если $\varepsilon < 1$, из неравенства (7), очевидно, следует $z = 0$, $\left|u_0\frac{\varepsilon^n}{2}\right| < \frac{\varepsilon^n}{2}$, $|u_0| < 1$, $u_0 = 0$. В силу произвольности ε и (достаточно большого) t неравенства (6) поэтому доказывают сингулярность системы (2).

Поступило
19 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Jarnik, Časopis Pěst. Mat. Fys., 68, 103 (1939). [2] A. Khintchine, Rend. Circ. Mat. Palermo, 50, 170 (1926). [3] K. Mahler, Časopis Pěst. Mat. Fys., 68, 85 (1939).