Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Н. ШЕВЧЕНКО

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПОД СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 6 V 1948)

Построим решение задачи о распределении напряжений и деформаций в полуплоскости, нагруженной вертикальной сосредоточенной силой (рис. 1). Упругое решение этой задачи известно. Искомое упруго-пластическое решение будет дано с учетом линейного упрочнения и несжимаемости материала.

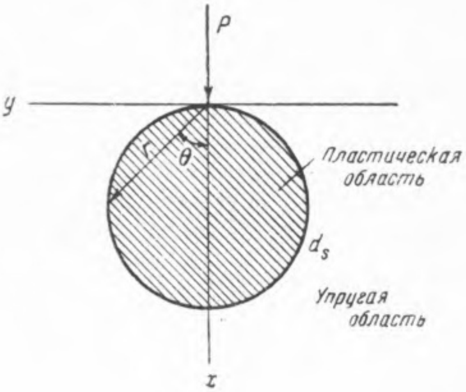

Рис. 1

Воспользуемся уравнениями пластичности в форме Генки при плоско-деформированном состоянии тела.

Принимая во внимание несжимаемость материала, имеем

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = \frac{\psi\sigma_r}{4G},$$

$$\varepsilon_z = 0, \qquad \sigma_z = \frac{\sigma_r}{2}. \tag{1}$$

Положим, что распределение напряжений в полуплоскости при пластической деформации такое же, как и в упругом решении:

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \sigma_\theta = 0, \qquad \tau = 0. \tag{2}$$

Искомые компоненты напряжения ε_r и ε_θ должны удовлетворять уравнениям (1) и условию совместности

$$\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2} + r^2\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} - r\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

Функцию ψ, входящую в (1), определим из условия пластичности

$$S = k(mE + \mu), \tag{4}$$

где S — интенсивность напряжения сдвига; E — интенсивность деформации сдвига; k, m и μ — константы, определяемые из опыта. Между m и μ существует линейная зависимость

$$n + \mu = 1, \tag{5}$$

где $n = km / G$.

Из уравнений (1), (2) и (5) находим:

$$\psi = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k\mu\pi}{p}\,\frac{r}{\cos\theta}\right), \tag{6}$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{1}{2Gn}\left(\frac{p\cos\theta}{\pi r} - k\mu\right). \tag{7}$$

Легко проверить, что полученные компоненты деформации ε_r и ε_θ удовлетворяют условию совместности (3). Границей распространения пластической деформации является окружность равных напряжений ($r\cos\theta = d$ (рис. 1)). Диаметр этой окружности определяется из формулы

$$d_s = \frac{p}{\pi k}.$$

На границе упругой и пластической областей

$$\sigma_r = -2k, \qquad \varepsilon_r = -\frac{k(1-\nu)}{G}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{k\nu}{G}. \tag{8}$$

Предельным переходом, полагая в (7) $n=1$, $\mu=0$, получим известное упругое решение.

Из полученного решения следует также, что для случая идеальной пластичности ($n=0$, $\mu=1$) решение не существует.

Аналогично решается и задача о действии сосредоточенной силы, приложенной под углом, отличным от $\pi/2$.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
30 IV 1948