Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. РОЗОВСКИЙ

УДАР ЦИЛИНДРА О ПОВЕРХНОСТЬ СРЕДЫ, МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОЙ МЕНЯЮТСЯ ВО ВРЕМЕНИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 V 1948)

1. Абсолютно жесткий прямой круговой цилиндр ударяется торцевой плоскостью о поверхность среды, механические свойства которой меняются во времени, с начальной скоростью v_0. Силой тяжести пренебрегаем. Предполагается, что цилиндр свободно скользит по поверхности среды. Требуется определить смещения и напряжения в подставке, а также силу сопротивления удару.

Смещение $q(t)$ цилиндра определяется из уравнения

$$m\ddot{q}(t)=F(q,t), \tag{1}$$

где $F(q, t)$ — полная сила сопротивления среды погружению цилиндра, действующая со стороны среды на цилиндр.

Начальные условия: $q(0)=0, \qquad \dot{q}(0)=v_0.$ (2)

Материал подставки подчиняется закону [1], связывающему величины напряжений, деформаций и времени:

$$\tau_{ii}=\lambda\theta(t)+2\mu e_{ii}(t)-\int_0^t[\varphi(t,\tau)\,\theta(\tau)+2\psi(t,\tau)\,e_{ii}(\tau)]\,d\tau, \tag{3}$$

$$\tau_{ij}=\mu e_{ij}(t)-\int_0^t\psi(t,\tau)\,e_{ij}(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

где λ, μ — мгновенные коэффициенты Ламе, $\varphi(t,\tau)$ и $\psi(t,\tau)$ — функции воздействия, $\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}$. Компоненты тензора напряжений τ_{ii}, τ_{ij} и тензора деформаций e_{ii}, e_{ij} суть функции x, y, z и t.

Подставка занимает все полупространство $z>0$. Начало координат находится в центре нижней поверхности цилиндра, оси x и y направлены вдоль поверхности подставки, а z перпендикулярно ей вниз.

Задача сводится к нахождению решения уравнения

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta(t)+\mu\vec{u}(t)-\int_0^t\{[\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\operatorname{grad}\theta(\tau)+$$

$$+\psi(t,\tau)\,\Delta\vec{u}(\tau)\}\,d\tau=0, \tag{5}$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$\text{при } z=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+0; \tag{6}$$

при $z=0$ и $x^2+y^2 \geqslant a^2$

$$\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \int_0^t \left[\varphi(t, \tau)\,\theta(\tau) + 2\psi(t, \tau)\frac{\partial w}{\partial z}\right] d\tau = 0; \qquad (7)$$

при $z=0$ и $x^2+y^2 < a^2$ $\qquad w=q(t)$. $\qquad (8)$

Здесь $\vec{u}(u, v, w)$ — вектор смещения; u, v, w — его составляющие по осям x, y, z; a — радиус цилиндра. Смещение цилиндра $q(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Принимая

$$u=\varphi_1 + z\,\partial\Phi/\partial x, \quad v=\varphi_2 + z\,\partial\Phi/\partial y, \quad w=\varphi_3 + z\,\partial\Phi/\partial z, \qquad (9)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Phi$ — гармонические функции, находим, что уравнение (5) и граничные условия будут удовлетворены, если

$$\varphi_1 = \frac{-2\mu}{\pi(\gamma+2\mu)} \frac{x}{r} \left[q(t) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\int_0^t Q(t, s)\,q(s)\,ds\right] \int_0^\infty \frac{\sin(a\alpha)}{\alpha} J_1(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha;$$

φ_2 получается из φ_1 заменой x на y;

$$\varphi_3 = \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a\alpha)}{\alpha} J_0(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha \quad \Phi = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\varphi_3 - \int_0^t Q(t, s)\,\varphi_3(s)\,ds\right], \qquad (10)$$

где $\qquad Q(t, s) = Q_3(t, s) - R_3(t, s) + \int_s^t R_3(t, \tau)\,Q_3(\tau, s)\,d\tau,$

$$Q_3(t, s) = Q_2(t, s) - R_1(t, s) + \int_s^t R_1(t, \tau)\,Q_2(\tau, s)\,d\tau,$$

$$Q_1(t, s) = \frac{\varphi(t, s) + 3\psi(t, s)}{\lambda+3\mu}, \quad Q_2(t, s) = \frac{\varphi(t, s) + \psi(t, s)}{\lambda+\mu},$$

где $R_1(t, s)$ и $R_3(t, s)$ — резольвенты ядер $Q_1(t, s)$ и $\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}Q_3(t, s)$.

Выражение для объемного расширения будет:

$$\Theta = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} - \int_0^t K(t,s)\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\,ds\right], \qquad (11)$$

где $\quad K(t, s) = Q(t, s) + \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}Q_4(t, s) - \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\int_s^t Q_4(t, \tau)\,Q(\tau, s)\,d\tau,$

$$Q_4(t, s) = Q_1(t, s) - R_2(t, s) + \int_s^t R_2(t, \tau)\,Q_1(\tau, s)\,d\tau,$$

где $R_2(t, s)$ — резольвента ядра $Q_2(t, s)$.

Сила F, действующая со стороны среды на цилиндр, будет

$$F = -\frac{8\mu(\lambda+\mu)\,a}{\lambda+2\mu}\left[q(t) - \int_0^t P(t, s)\,q(s)\,ds\right], \qquad (12)$$

где
$$P(t, s)=Q_2(t, s)-\frac{1}{\mu}\left[\mu Q(t, s)-\int\limits_s^t \psi(t, \tau) Q(\tau, s) d\tau\right]+$$
$$+\frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda K(t, s)-\int\limits_s^t \varphi(t, \tau) K(\tau, s) d\tau\right].$$

Для определения $q(t)$ подставим в (1) вместо F выражение (12):
$$m\ddot{q}(t)+\nu\left[q(t)-\int\limits_0^t P(t, s) q(s) ds\right]=0, \quad \text{где} \quad \nu=\frac{8\mu(\lambda+\mu) a}{\lambda+2\mu}. \tag{13}$$

Пользуясь методом, примененным нами в статье ([2]), найдем решение уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (2):
$$q(t)=v_0\left(t-\int\limits_0^t W(t, \tau) f(\tau) d\tau\right), \tag{14}$$

где $W(t, \tau)=t-\tau-\int\limits_\tau^t (t-\quad) N(s, \tau) ds, \ f(t)=\frac{\nu}{m}\left(t-\int\limits_0^t \tau P(t, \tau) d\tau\right);$

$$N(t, \tau) - \text{резольвента ядра } \frac{\nu}{m}\left(t-\tau-\int\limits_\tau^t P(t, s)(s-\tau) ds\right).$$

Принимая во внимание (10), получим, согласно (9), формулы для смещений u, v, w и затем, с помощью формул (3) и (4) и выражения для Θ из (11), получим формулы для компонентов напряжений. При этом, надлежит всюду вместо q подставить его выражение из (14).

Формулы для смещений и напряжений будут:
$$u_r=-f_1(t), \quad u_z=f_2(t), \quad \tau_{rr}=-2\mu f_3(t), \ \tau_{zz}=-2\mu f_4(t), \quad \tau_{zr}=\mu f_5(t),$$

где
$$f_i(t)=\frac{2v_0}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{A_i(t)-\int\limits_0^t\left[\tau\Phi_i(t, \tau)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(W(t, \tau)-\int\limits_\tau^t \Phi_i(t, s) W(s, \tau) ds\right) f(\tau)\right] d\tau\right\} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),$$
$$A_1=\int\limits_0^\infty\left[\frac{\mu}{\alpha}-(\lambda+\mu) z\right] \sin(a\alpha) J_1(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha,$$
$$A_2=\int\limits_0^\infty\left[\frac{\lambda+2\mu}{\alpha}+(\lambda+\mu) z\right] \sin(\alpha r) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha,$$
$$A_3=\frac{\partial A_1}{\partial r}+\lambda \int\limits_0^\infty \sin(a\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha,$$
$$A_5=\frac{\partial A_2}{\partial r}-\frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad \Phi_1(t, \tau)=B_1 Q(t, \tau), \quad \Phi_2(t, \tau)=B_2 Q(t, \tau),$$
$$\Phi_3(t, \tau)=\frac{1}{\mu} \psi(t, s) \frac{\partial A_1}{\partial r}+\left[Q(t, \tau)-\frac{1}{\mu}\int\limits_\tau^t Q(s, \tau) ds\right] \frac{\partial B_1}{\partial r}+$$
$$+\left[\lambda K(t, \tau)-\int\limits_\tau^t \varphi(t, s) K(s, \tau) ds+\varphi(t, \tau)\right] \int\limits_0^\infty \lambda \sin(a\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha,$$

A_4 получается из A_3 заменой $\partial A_1/\partial r$ на $\partial A_2/\partial z$, а $\Phi_4(t, \tau)$ из $\Phi_3(t, \tau)$ заменой $\partial B_1/\partial r$ на $-\partial B_2/\partial z$,

$$\Phi_5(t, \tau)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_2}{\partial r}-\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\psi(t, \tau)+$$

$$+\left(\frac{\partial B_2}{\partial r}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)\left(Q(t, \tau)-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{t}\psi(t, s)\,Q(s, \tau)\,ds\right),$$

$$B_1=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\int_0^\infty\left(\frac{\mu}{\alpha}+\lambda z\right)\sin(a\alpha)\,J_1(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha,$$

$$B_2=z(\lambda+\mu)\int_0^\infty\sin(a\alpha)\,J_0(\alpha r)\,e^{-\alpha z}\,d\alpha.$$

2. Пусть $\varphi(t, \tau)\equiv 0$, $\psi(t, \tau)=\alpha G e^{-\beta(t-\tau)}$. Здесь $G=\mu$ — мгновенный модуль сдвига, $\alpha=G_2/G\tau_2$, $\beta=1/\tau_2$, где τ_2 — время релаксации, G_2 — девиационный модуль сдвига; $\tau_2=\eta_2/G_2$, $G_2=G-G_1$, где η_2 — обратимая вязкость, G_1 — статический модуль сдвига.

В рассматриваемом случае материал подставки представляет собой упруго-вязкую среду с обратимой сдвиговой текучестью λ (по Я. И. Френкелю ([3])). Уравнение (13) примет вид:

$$m\ddot{q}(t)+\nu\left[q(t)-\int_0^t\left(\gamma_1 e^{-\beta(t-s)}+\gamma_2 e^{-\beta_1(t-s)}\right)q(s)\,ds\right]=0, \tag{15}$$

где $\beta_1=\beta-\alpha+\dfrac{\alpha\lambda}{\lambda+2G}$, $\gamma_1=\dfrac{\alpha(\lambda+2G)}{2(\lambda+G)}$, $\gamma_2=\dfrac{\alpha\lambda^2}{2(\lambda+G)(\lambda+2G)}$.

Решение уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям (2):

$$q(t)=\sum_{i=1}^{4}c_i e^{r_i t}, \tag{16}$$

где r_i определяется из уравнения

$$r^4+a_1r^3+a_2r^2+a_3r+a_4=0, \tag{17}$$

где $a_1=\beta+\beta_1$, $a_2=\beta\beta_1+\dfrac{\nu}{m}$, $a_3=\dfrac{\nu}{m}\left[2(\beta-\alpha)+\dfrac{\alpha\lambda}{\lambda+G}\right]$,

$$a_4=\frac{\nu}{m}(\beta-\alpha)\left(\beta-\alpha+\frac{\alpha\lambda}{\lambda+G}\right).$$

Все коэффициенты уравнения (17) положительны, поэтому оно не будет иметь положительных корней. Глубина погружения цилиндра q будет с течением времени убывать колебательно или чисто апериодически. Сила сопротивления удару:

$$F=-\frac{8G(\lambda+G)a}{\lambda+2G}\sum_{i=1}^{4}c_i\left(1-\frac{\gamma_1}{\beta+r_i}-\frac{\gamma_2}{\beta_1+r_i}\right)e^{r_i t}.$$

Поступило
14 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro-diff. Equations, London, 1931. [2] М. И. Розовский, Прикладн. матем. и мех., **11**, 3 (1947). [3] Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, изд. АН СССР, 1945.