Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 2

МАТЕМАТИКА

П. КОНТОРОВИЧ

К ТЕОРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 15 XI 1947)

Цель заметки — показать, что теория приведенных абелевых групп без кручения, развернутая Р. Бэром (1), в значительной части остается справедливой для гораздо более общих групп, называемых мною R-группами.

§ 1. Определение. Группу G без кручения (т. е. без элементов конечного порядка, отличных от 1) назовем R-группой, если она может быть представлена в виде теоретико-множественной суммы попарно взаимно простых локально циклических (абелевых групп 1-го ранга) подгрупп. Указанные локально циклические подгруппы называются локально циклическими компонентами расщепления группы G.

Класс R-групп охватывает значительное число известных в настоящее время классов групп без кручения. Абелевы и метабелевы группы без кручения, а также группы, являющиеся объединением конечной или бесконечной последовательности групп возрастающего центрального ряда, все факторы которого без кручения, будут R-группами. Свободная и локально свободная группы будут R-группами. Прямое и свободное произведение R-групп будет снова R-группой.

Определение. Подгруппу H группы G назовем изолированной в G, если всякое уравнение $x^n = h$, $h \in H$ $(h \neq 1)$, n — целое число, разрешимое в G, имеет все свои корни в H.

Теорема 1. 1) *Группа G без кручения тогда и только тогда будет R-группой, когда централизатор каждого ее элемента будет изолированной подгруппой. Иначе, из перестановочности каких-либо степеней двух элементов следует перестановочность самих элементов.*

2) *G тогда и только тогда будет R-группой, когда уравнение $x^n = a$, $a \in G$, n — натуральное число, имеет только единственное решение, если оно вообще разрешимо.*

Приведенная теорема позволяет классифицировать элементы и локально циклические компоненты R-группы по G-числам Штейница и по родам (по классам эквивалентных G-чисел). G-число элемента $a \in G$ определяется через $\Gamma(a) = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\alpha(p_i)}$, где p_i пробегает все простые числа и $\alpha(p_i)$ есть p_i-высота элемента a, т. е. $\alpha(p_i) = \alpha_i$ показывает, что уравнение $x^{p_i^{\alpha_i}} = a$ разрешимо, но уравнение $x^{p^{\alpha_i+1}} = a$ уже не разрешимо; $\alpha_i = \infty$, если $x^{p_i^{\alpha_i}} = a$ разрешимо при всяком натуральном α_i. Род $\sigma(a)$ элемента a определяется как множество (эквивалентных)

G-чисел, отличающихся от $\Gamma(a)$ только конечным числом конечных $\alpha_i = \alpha(p_i)$. Все отличные от единицы элементы локально циклического компонента будут одного и того же рода, и этот род, сопоставленный компоненту, характеризует его с точностью до изоморфизма. Действия над G-числами и родами определяются как в случае абелевых групп без кручения. В частности, если a и b — перестановочные элементы, то $\Gamma(ab)$ и $\sigma(ab)$ делятся, соответственно, на общий наибольший делитель $(\Gamma(a), \Gamma(b))$ и $(\sigma(a), \sigma(b))$.

Определение. R-группу $G = G(\sigma)$ назовем равнородной рода σ, если все ее отличные от единицы элементы будут одного и того же рода σ.

Определение. Пря оизведение $G = \prod\limits_{\sigma} G(\sigma)$ равнородных групп $G(\sigma)$, где σ пробегает какое-то множество различных родов, назовем **приведенным разложением** группы G. Группу, обладающую приведенным разложением, назовем приведенной R-группой.

§ 2. В R-группе G для данного рода σ составим следующие четыре комплекса элементов:

$$\mathfrak{A}^1_\sigma = \mathfrak{A}(G;\ \sigma(x) \geqslant \sigma), \qquad \mathfrak{A}^2_\sigma = \mathfrak{A}(G;\ \sigma(x) > \sigma),$$

$$\mathfrak{A}^3_\sigma = \mathfrak{A}(G;\ \sigma(x)\ \text{не} < \sigma), \quad \mathfrak{A}^4_\sigma = \mathfrak{A}(G;\ \sigma(x)\ \text{не} \leqslant \sigma),$$

где $\mathfrak{A}^1_\sigma$ означает множество всех элементов $x \in G$, для которых $\sigma(x) \geqslant \sigma$ и аналогично для остальных комплексов. Все $\mathfrak{A}^i_\sigma$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ будут характеристическими комплексами и содержат вместе с данным элементом x также всякий элемент y, для которого $\sigma(y) \geqslant \sigma(x)$. Очевидны следующие соотношения:

$$\mathfrak{A}^2_\sigma = \mathfrak{A}^1_\sigma \cap \mathfrak{A}^4_\sigma, \qquad \mathfrak{A}^3_\sigma = \mathfrak{A}^1_\sigma \cup \mathfrak{A}^4_\sigma,$$

где $\cap$, $\cup$ означают, соответственно, теоретико-множественное пересечение и объединение. Рассматриваемые комплексы порождают, соответственно, характеристические подгруппы

$$G^1_\sigma = G(\sigma(x) \geqslant \sigma), \qquad G^2_\sigma = G(\sigma(x) > \sigma),$$

$$G^3_\sigma = G(\sigma(x)\ \text{не} < \sigma), \quad G^4_\sigma = G(\sigma(x)\ \text{не} \leqslant \sigma).$$

Из соотношений для $\mathfrak{A}^i_\sigma$ следует:

$$G^2_\sigma \subseteq G^1_\sigma \cap G^4_\sigma, \quad G^3_\sigma = G^1_\sigma G^4_\sigma.$$

Положим $G^*(\sigma) = \dfrac{G^1_\sigma}{G^2_\sigma}$, $G^{**}(\sigma) = \dfrac{G^3_\sigma}{G^4_\sigma}$. Легко доказать, что $G^*(\sigma)$ гомоморфно отображается на $G^{**}(\sigma)$ и этот гомоморфизм станет изоморфизмом, если $G^2_\sigma = G^1_\sigma \cap G^4_\sigma$.

Теорема 2. *Пусть $G = \prod\limits_{\alpha} G_\alpha$ — прямое произведение R-групп, где α пробегает какое-то множество индексов. Тогда*

$$^i_\sigma = \prod_\alpha G^i_{\alpha\sigma}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

для каждого данного рода σ.

Лемма 1. *Пусть* $G=\prod_{\sigma} G(\sigma)$ — *приведенное разложение группы* G. *Тогда для каждого рода* τ *имеют место следующие соотношения*:

$$G_\tau^1=\prod_{\sigma\geqslant\tau} G(\sigma),\quad G_\tau^2=\prod_{\sigma>\tau} G(\sigma),\quad D_\tau^3=\prod_{\sigma \text{ не } <\tau} G(\sigma),\quad G_\tau^4=\prod_{\sigma \text{ не } \leqslant\tau} G(\sigma),$$

$$G^*(\tau)=\frac{G_\tau^1}{G_\tau^2}=\frac{\prod\limits_{\sigma\geqslant\tau} G(\sigma)}{\prod\limits_{\sigma>\tau} G(\sigma)}\simeq G(\tau),\quad G^{**}(\tau)=\frac{G_\tau^3}{G_\tau^4}=\frac{\prod\limits_{\sigma \text{ не } <\tau} G(\sigma)}{\prod\limits_{\sigma \text{ не } \leqslant\tau} G(\sigma)}\simeq G(\tau),$$

где $G(\tau)$ — *равнородная группа рода* τ.

Из этой леммы, в частности, следует, что в приведенной группе $G=\prod_{\sigma} G(\sigma)$ все G_σ^i будут прямыми множителями для каждого рода σ.

Определение. R-группу G назовем локально приведенной, если каждое конечное множество ее элементов принадлежит приведенному прямому множителю.

Ясно, что каждая приведенная R-группа будет и локально приведенной R-группой.

Теорема 3. *Для локально приведенной R-группы верны следующие предложения.*

1) *Все* G_σ^i, $i=1,2,3,4$, *будут изолированными подгруппами для каждого рода* σ.

2) $G_\sigma^2=G_\sigma^1\cap G_\sigma^4$ *для каждого рода* σ.

3) $G^*(\sigma)$ *и* $G^{**}(\sigma)$ — *равнородные группы рода* σ.

4) *Для каждого элемента* $g\in G$, $g\neq 1$, *существует не меньше одного и не больше конечного числа родов* σ, *для которых* $g\in G_\sigma^3$ $g\,\bar{\in}\, G_\sigma^4$.

§ 3. Пусть G — R-группа. Обозначим через $\mathfrak{M}^*(G)$ и $\mathfrak{M}^{**}(G)$ множества всех родов σ, для которых, соответственно, $G^*(\sigma)\neq 1$, $G^{**}(\sigma)\neq 1$. Пусть $\mathfrak{M}(G)$ есть множество всех родов, входящих в G. Из соотношения гомоморфизма между $G^*(\sigma)$ и $G^{**}(\sigma)$ вытекает $\mathfrak{M}^{**}(G)\subseteq\mathfrak{M}^*(G)$ Имеет место также $\mathfrak{M}^*(G)\subseteq\mathfrak{M}(G)$. Для элемента $g\in G\,(g\neq 1)$ определим также множества $\mathfrak{M}^{**}(g)$ и $\mathfrak{M}^*(g)$ как совокупность тех родов σ для которых $g\in G_\sigma^1$, $g\,\bar{\in}\, G_\sigma^2$ и, соответственно, $g\in G_\sigma^3$, $g\,\bar{\in}\, G_\sigma^4$. Для $g=1$ положим $\mathfrak{M}^*(1)=\mathfrak{M}^{**}(1)=0=$ пустому множеству.

Лемма 2. *Пусть для R-группы G и для множества ее родов* $\mathfrak{M}(G)$ *выполняются следующие условия*:

a) *для каждого рода* σ $G_\sigma^1=G_\sigma^2\times G(\sigma)$, *где* $G(\sigma)$ — *инвариантная подгруппа, у которой все отличные от единицы элементы будут рода* σ *в* G;

b) *для каждого рода* σ $G_\sigma^2=G_\sigma^1\cap G_\sigma^4$;

c) *для каждого элемента* $g\in G$, $g\neq 1$, $\mathfrak{M}^{**}(g)$ *будет непустым конечным множеством.*

Тогда имеют место следующие предложения:

1) $G(\sigma)$ *является также решением равенства*

$$G_\sigma^3=G_\sigma^4\times G(\sigma);$$

2) *композит* G' *всех* $G(\sigma)$ *будет прямым произведением* $G'=\prod G(\sigma)$;

3) *если* $G' \neq G$, *то каждому элементу* $a \in G$, $a \overline{\in} G'$ *соответствует элемент* $b \in G$, $b \overline{\in} G'$, *такой, что* $ab^{-1} \in G'$ *и каждый род из* $\mathfrak{M}^{**}(b)$ *будет собственным кратным (строго больше) не меньше одного рода из* $\mathfrak{M}^{**}(a)$.

Определение. В множестве родов $\mathfrak{M}$ имеет место условие максимальности, если в каждом подмножестве $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ существует род не меньше остальных родов того же подмножества.

Теорема 4. *Если в множестве родов* $\mathfrak{M}^{*}(G)$ *для группы* G *выполняется условие максимальности, то условия* a), b), c) *леммы 2 необходимы и достаточны для того, чтобы* G *была приведенной группой.*

Теорема 5. *Пусть в множестве родов* $\mathfrak{M}^{*}(G)$ *для группы* G *для любой пары родов* σ, τ *имеет место одно из соотношений* $\sigma > \tau$, $\sigma = \tau$, $\sigma < \tau$. *Пусть к тому же в* $\mathfrak{M}^{*}(G)$ *имеет место условие максимальности. Тогда для того, чтобы* G *была приведенной* R*-группой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *для каждого рода* σ $G^1_\sigma = G^2_\sigma \times G(\sigma)$, *где* $G(\sigma)$ — *инвариантная подгруппа, все элементы не равные единице которой будут рода* σ *в* G;

2) *для каждого* $g \in G$ $(g \neq 1)$ $g \overline{\in} G^2_{\sigma(g)}$.

Теорема 6. *Пусть в* $\mathfrak{M}^{*}(G)$ *имеет место условие максимальности. Тогда для того, чтобы* G *была приведенной группой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *для каждого рода* σ $G^1_\sigma = G^2_\sigma \times G(\sigma)$, *где* $G(\sigma)$ — *инвариантная подгруппа, все не равные единице элементы которой будут рода* σ *в* G;

2) *для каждого рода* τ G^2_τ *является композитом всех* G^1_σ *с* $\sigma > \tau$, $\sigma \in \mathfrak{M}^{*}(G)$.

3) *для каждого рода* σ $G^2_\sigma = G^1_\sigma \cap G^4_\sigma$.

Теорема 7. *Пусть* S — *подгруппа приведенной группы* G — *удовлетворяет следующим условиям (роды элементов из* S *вычисляются по их значениям в* S*):*

1) *в* $\mathfrak{M}^{*}(S)$ *выполняется условие максимальности;*

2) *для каждого рода* σ $S^1_\sigma = S^2_\sigma \times S(\sigma)$, *где* $S(\sigma)$ — *инвариантная в* S *подгруппа, все отличные от единицы элементы которой будут рода* σ *в* S;

3) $S^i_\sigma = S \cap G^i_\sigma$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Тогда S *сама приведенная группа.*

Следствие. Каждый прямой множитель приведенной группы G с условием максимальности в $\mathfrak{M}^{*}(G)$ будет приведенной группой.

Поступило
15 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Baer, Duke Math. J., 3, 68 (1937).