Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

МЕХАНИКА

Н. А. КАРТВЕЛИШВИЛИ

ОБ УСЛОВИЯХ КАЧЕСТВА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 10 IV 1948)

Переходный процесс в системе регулирования описывается уравнением объекта регулирования

$$M(p)S+N(p)\Phi=Q(p)\Pi \tag{1}$$

и уравнением регулятора

$$A(p)\Phi=B(p)S, \tag{2}$$

в которых: p — оператор Хевисайда; S, Π и Φ — операторные изображения регулирующего воздействия (величины на выходе регулятора), возмущающего воздействия и отклонения регулируемой величины от номинального значения; M, N, Q — функции p, параметры которых зависят только от объекта регулирования; A, B — функции p, параметры которых зависят только от регулятора. В рассматриваемых здесь системах, имеющих только сосредоточенные постоянные, A, B, M, N, Q суть целые рациональные функции.

Из (1) и (2) следует:

$$\Phi=\frac{Q(p)\Pi}{N(p)\left[1+\dfrac{M(p)A(p)}{N(p)B(p)}\right]}, \tag{3}$$

$$\Phi \doteq C_0+\sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}, \tag{4}$$

где t — время, C_p и C_k — постоянные, n — степень полинома $F(p)=N(p)B(p)+M(p)A(p)$, p_k — его нули.

Качество регулирования тем выше, чем больше периоды колебаний регулируемой величины (в практически трудно достижимом пределе желательно, чтобы периоды колебаний были бесконечно большими, т. е. чтобы система была апериодичной) и чем быстрее эти колебания затухают, т. е. чем меньше $\operatorname{Re} p_k$ и $|\operatorname{Im} p_k|$. Условия качества регулирования формулируются так:

$$\operatorname{Re} p_k<-\eta_0, \quad \omega_0>\operatorname{Im} p_k>-\omega_0 \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где η_0 и ω_0 — положительные числа, задаваемые на основании эксплоатационных требований.

Эти условия могут быть сформулированы иначе: на плоскости комплексного переменного $p=\eta+j\omega$ внутри замкнутого контура U, ограниченного тремя отрезками — прямой $\omega=\omega_0$ от точки $B(-\eta_0, j\omega_0)$

до точки $A(-\infty, j\omega_0)$, прямой $\omega = -\omega_0$ от точки $C(-\eta_0, -j\omega_0)$ до точки $D(-\infty, -j\omega_0)$ и прямой $\eta = -\eta_0$ от точки B до точки C — и дугой V окружности бесконечно большого радиуса с центром в точке $(0, j0)$ и пересекающей вещественную ось в точке $E(\infty, j0)$, не должно быть ни одного нуля полинома $F(p)$.

Рассмотрим два случая.

1. $N(p)$ — полином высокой степени, вычисление нулей которого требует большой затраты времени (например, в случае регулирования гидроэлектрического агрегата установки, снабженной уравнительным резервуаром).

Знаменатель правой части формулы (3) представим в виде

$$G(p) = N(p) + M(p)\frac{A(p)}{B(p)}. \tag{5}$$

Нули $G(p)$ и $F(p)$, очевидно, совпадают. Полюсы $G(p)$ суть нули $B(p)$. Степень $B(p)$ обычно невысока и эти нули вычисляются

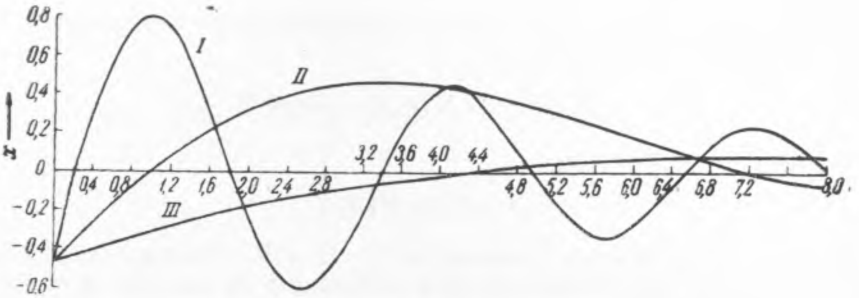

Рис. 1. Графики переходной функции для частного случая системы второго порядка при одинаковых декрементах, но при разных периодах: $I - x = e^{-0,2t}\sin(2t - 0,5)$ $(T = \pi)$; $II - x = e^{-0,2t}\sin\left(\frac{t}{2} - 0,5\right)$ $(T = 4\pi)$; $III - x = e^{-0,2t}\sin\left(\frac{t}{8} - 0,5\right)$ $(T = 16\pi)$

легко. Пусть число нулей $B(p)$ внутри U равно r. При $|p| \to \infty$ доминирующим в (5) становится член вида αp^m, где $\alpha = \text{const}$, m — степень $N(p)$ (эта степень всегда больше разности между суммой степеней M и A и степенью B). Следовательно, изменение $\arg G(p)$ при обходе дуги V в направлении DEA равно $2\pi m$. Пусть δ — изменение $\arg G(p)$ при обходе контура $ABCD$. Согласно теореме Коши,

$$\delta + 2\pi m = 2\pi(s - r), \tag{6}$$

где s — число нулей $G(p)$ внутри U. Так как s должно быть равно нулю, то условия качества регулирования будут соблюдены, если

$$\delta = -2\pi(m + r), \tag{7}$$

т. е. если при обходе контура $ABCD$ вектор комплексной переменной $G(p)$, вращаясь против часовой стрелки, повернется вокруг начала координат на угол $2\pi(m + r)$.

2. $N(p)$ — полином степени не выше третьей, вычисление нулей которого не требует большой затраты времени.

Рассмотрим функцию:

$$H(p) = \frac{G(p)}{N(p)} = 1 + \frac{M(p)}{N(p)}\frac{A(p)}{B(p)}, \tag{8}$$

нули которой, так же как нули $G(p)$, совпадают с нулями $F(p)$. Так как $H(p) \to 1$ при $|p| \to \infty$, то изменение $\arg H(p)$ на V равно нулю, а дуге V соответствует на плоскости $H(p)$ точка $(1, j0)$. При обходе контура $ABCD$ конец вектора $H(p)$ опишет вокруг начала координат замкнутую кривую, проходящую через точку $(1, j0)$. Полюсами $H(p)$ являются нули $N(p)$ и $B(p)$. Пусть r_1 — сумма числа нулей $N(p)$ и $B(p)$ внутри U, а δ_1 — изменение $\arg H(p)$ при обходе контура $ABCD$. Согласно теореме Коши,

$$\delta_1 = 2\pi (s_1 - r_1), \tag{9}$$

где s_1 — число нулей $H(p)$ внутри U. Для удовлетворения условий качества регулирования должно быть $s_1 = 0$, т. е.

$$\delta_1 = -2\pi r_1. \tag{10}$$

Другими словами, условия качества регулирования будут удовлетворены в том случае, когда при обходе контура $ABCD$ вектор $H(p)$,

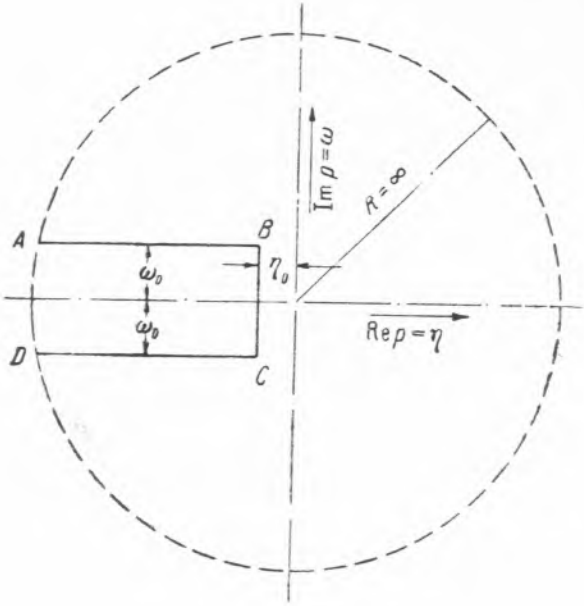

Рис. 2

вращаясь против часовой стрелки, повернется вокруг начала координат на угол $2\pi r_1$.

Легко проверить, что последнее положение может быть сформулировано еще так: условия качества регулирования будут удовлетворены, если при обходе контура $ABCD$ конец вектора

$$W(p) = H(p) - 1 = \frac{M(p)}{N(p)} \frac{A(p)}{B(p)} \tag{11}$$

обойдет r_1 раз вокруг точки $(1, j0)$, причем для наблюдателя, движущегося вместе с концом вектора $W(p)$ и обращенного лицом в сторону движения, точка $(1, j0)$ должна находиться слева.

Легко проверить, что если речь идет только об устойчивости (но не о качестве) регулирования, т. е. только о соблюдении неравенства $\operatorname{Re} p_k < 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то сформулированный критерий переходит в известный критерий устойчивости, предложенный Найквистом.

Поступило
15 III 1948