

Н. Н. БАУТИН

О ДВИЖЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЧАСОВ, ИМЕЮЩЕЙ ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

МОДЕЛЬ ЧАСОВ ГАЛИЛЕЯ — ГЮЙГЕНСА

(Представлено академиком А. А. Андроновым 26 IV 1948)

1. А. А. Андронов и Ю. И. Неймарк предложили модель часов⁽¹⁾, в которой, с одной стороны, сохранены основные особенности часов как динамической системы с двумя степенями свободы, а с другой, сведены к минимуму вычислительные трудности. Однако А. А. Андронов и Ю. И. Неймарк рассмотрели лишь тот простейший случай, когда модель соответствует догалилеевым часам, т. е. часам без маятника или пружины.

В настоящей заметке рассмотрен более сложный случай часов Галилея — Гюйгенса (т. е. часов с маятником или пружиной) и найдены величины, характеризующие периодическое движение и его устойчивость. Показано, что в рассматриваемой модели возможны периодические режимы двух типов: на встречных и на подталкивающих ударах. Эти два типа могут быть переведены один в другой непрерывным изменением параметров системы (например, изменением вращения не нарушается (что не всегда имеет место), то при этом также непрерывно изменяются период, амплитуда и место соударения ходового колеса с балансиrom.

2. Пусть, как и в модели А. А. Андронova и Ю. И. Неймарка, „ходовое колесо“ осуществлено в виде бесконечной ленты, оснащенной зубцами, и балансиr двигается поступательно между лентами ходового колеса и снабжен палетами f и g , воспринимающими удары.

Чтобы на одной модели рассмотреть различные режимы, при которых место удара может меняться в широких пределах, наделим зубцы ходового колеса специальными свойствами, в техническое осуществление которых здесь нет надобности входить*. Именно, будем считать, что в промежутках между ударами ходовое колесо имеет только один выдвинутый зубец и этот зубец после удара мгновенно убирается, а вместо него появляется по указанному ниже закону новый. Будем также считать, что зубцы не служат препятствием для таких движений балансира, при которых он обгоняет зубцы ходового колеса.

Пусть общее число зубцов ходового колеса равно N и пусть зубцы расположены на равных расстояниях $2a$ и последовательно перенуме-

* В реальных устройствах место удара может меняться лишь в узких пределах, обусловленных конструкцией и взаиморасположением ходового колеса и балансира. Любой из режимов, возможных в рассматриваемой модели и характеризуемый, в частности, местом удара ходового колеса с балансиrom, легко может быть осуществлен конструктивно. Однако для совместного рассмотрения на одной модели и сравнения их необходимо отвлечься от кинематических особенностей моделей.

рованы. Примем, что удары наносятся последовательно зубцами номера $j, j+n \pmod{N}, j-1, j-1+n \pmod{N}$ и т. д., что баланси́р связан с положением равновесия пружиной и что положение равновесия баланси́ра конструктивно выбрано таким образом, чтобы в момент, когда на верхней ленте над положением равновесия находится j -й зубец, зубцы $j+n$ и $j+n+1$ на нижней ленте располагались симметрично по отношению к положению равновесия, находясь от него на равных расстояниях (рис. 1). Мы получим модель маятниковых часов Галилея—Гюйгенса, если предоставим баланси́ру свободно двигаться под влиянием сил трения и пружины и под действием

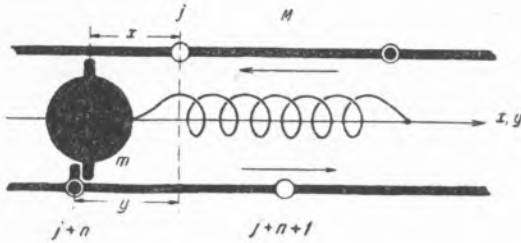


Рис. 1

встречных или подталкивающих ударов со стороны ходового колеса, приводимого во вращение постоянным моментом. В пределе при неограниченном ослаблении пружины мы получим модель догалилеевых часов.

3. Введем неподвижную систему координат с нача-

лом отсчета в положении равновесия баланси́ра и будем определять положение баланси́ра с помощью координаты x , а положение ходового колеса с помощью координаты y (рис. 1).

Пусть κ — коэффициент упругости пружины; тогда уравнения движения для промежутков времени между ударами в обычных обозначениях ⁽¹⁾ могут быть записаны в виде:

$$M \frac{d\dot{y}}{dt} = \pm P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad m \frac{d\dot{x}}{dt} = -\kappa x - b\dot{x} - mg\rho \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad (1)$$

где знак \pm берется для зубцов нижней, а знак $-$ для зубцов верхней ленты ходового колеса.

Будем считать удары мгновенными и примем, что доударные скорости \bar{x}, \bar{y} связаны с послеударными скоростями \dot{x}, \dot{y} обычными для не вполне упругого удара соотношениями

$$\dot{x} = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha) \bar{y}, \quad \dot{y} = \beta \bar{x} + (1 - \beta) \bar{y}, \quad (2)$$

где $\alpha = m - kM/m + M$, $\beta = (1 + k)m/m + M$ и k — коэффициент восстановления.

Уравнения (1) и (2) позволяют написать точечные преобразования Ω_{fg} и Ω_{gf} для переходов между послеударными состояниями $\{x_0, y_0 (\equiv x_0), \dot{x}_0, \dot{y}_0\}$ и $\{x_1, y_1 (\equiv x_1), \dot{x}_1, \dot{y}_1\}$, порождаемыми последовательными ударами о палеты f и g или, наоборот, g и f .

В силу симметрии фазового пространства (система (1) не меняется при замене x, y, \dot{x}, \dot{y} на $-x, -y, -\dot{x}, -\dot{y}$) целесообразно отождествить симметричные состояния и рассматривать только один тип переходов (например, порождаемый ударами сначала о палету f , потом g). Рассмотрение последовательности послеударных состояний сводится тогда к рассмотрению преобразования в себя пространства послеударных состояний x, \dot{x}, y, \dot{y} ($x - y \geq 0$) при неограниченном повторении преобразования $T = \Omega_{fg}$, где черта сверху означает переход после преобразования Ω_{fg} в симметричную точку.

4. Рассмотрим случай $\rho = 0$ и положим $\frac{x}{a} = \xi, \frac{y}{a} = \eta, \frac{P_0}{2aM} = p,$

$\frac{b}{2m} = h$ и $\frac{x_0}{m} = x$. Точечное преобразование Ω_{fg} в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\alpha \left\{ \frac{\lambda(\mu \dot{\xi}_0 - \dot{\xi}_0)}{\mu - \lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{\mu(\lambda \xi_0 - \dot{\xi}_0)}{\lambda - \mu} e^{\mu\tau} \right\} - (1 - \alpha)(\dot{\eta}_0 - 2p\tau), \\ \dot{\eta}_1 &= -\beta \left\{ \frac{\lambda(\mu \dot{\xi}_0 - \dot{\xi}_0)}{\mu - \lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{\mu(\lambda \xi_0 - \dot{\xi}_0)}{\lambda - \mu} e^{\mu\tau} \right\} - (1 - \beta)(\dot{\eta}_0 - 2p\tau), \quad (3) \\ \xi_1 &= \xi_0 + p\tau^2 - \dot{\eta}_0\tau - 1, \end{aligned}$$

где λ и μ — корни характеристического уравнения $\zeta^2 + 2h\zeta + x = 0$ (действительные или комплексные), а τ — наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\mu \dot{\xi}_0 - \dot{\xi}_0}{\mu - \lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{\lambda \xi_0 - \dot{\xi}_0}{\lambda - \mu} e^{\mu\tau} + \xi_0 + p\tau^2 - \dot{\eta}_0\tau - 1 = 0.$$

Преобразование (3) содержит 5 существенных параметров: α, β, p, h, x .
5. Для неподвижной точки точечного преобразования (3), соответствующей периодическому движению, имеем:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\beta - 2\alpha}{\beta} p\tau + \frac{a}{\tau}, \quad \xi_0 = \dot{\xi}_0 \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\mu\tau}}{\mu e^{\lambda\tau} - \lambda e^{\mu\tau} + \mu - \lambda}, \quad \dot{\eta}_0 = \frac{a - p\tau^2}{\tau},$$

где τ — положительный корень уравнения:

$$p\tau^2 \left[2\alpha - \beta + \frac{2(1 - \alpha)}{\mu - \lambda} \left(\frac{\mu}{e^{\mu\tau} + 1} - \frac{\lambda}{e^{\lambda\tau} + 1} \right) \right] = \alpha\beta. \quad (4)$$

Точечное преобразование (3) может иметь одну или более неподвижных точек на конечном расстоянии от начала координат в зависимости от числа положительных корней уравнения (4) при различных значениях параметров.

Неподвижная точка будет устойчивой, если для нее выполняются условия:

$$A \equiv \beta(2\alpha - \beta) \frac{1}{g} + \beta(1 - \alpha)[2(1 - \bar{\alpha}_1) - g\tau\Phi_1] > 0,$$

$$B \equiv 2[1 + (1 - \beta)^2] + [x^2 + (\alpha - \beta)^2](b_1 - a_1) + [2(1 - \alpha)^2 - (1 - \beta)^2 - 1](1 - \bar{\alpha}_1) - 2g(1 - \alpha)^2(1 - \bar{\alpha}_1)^2 - \beta(1 - \alpha)[2\bar{\alpha}_0 + g\tau\Phi_2] > 0, \quad (5)$$

$$C \equiv 4[1 + (\alpha - \beta)^2 b_1] - B > 0,$$

$$D \equiv 2 - \frac{A + B}{2} + \frac{B - A}{2}(\alpha - \beta)^2 b_1 - 2(\alpha - \beta)^4 b_1^2 > 0,$$

$$\text{где } \frac{1}{g} = (e^{\mu\tau} + 1)(e^{\lambda\tau} + 1), \quad \bar{a}_0 = \frac{e^{\mu\tau} - e^{\lambda\tau}}{(\mu - \lambda)\tau}, \quad \bar{a}_1 = \frac{\mu e^{\lambda\tau} - \lambda e^{\mu\tau}}{\mu - \lambda},$$

$$b_1 = e^{(\mu + \lambda)\tau}, \quad a_1 = \frac{\mu e^{\mu\tau} - \lambda e^{\lambda\tau}}{\mu - \lambda}, \quad \Phi_1 = \frac{1}{\mu - \lambda} [\mu^2 e^{\mu\tau} (e^{\lambda\tau} + 1)^2 - \lambda^2 e^{\lambda\tau} (e^{\mu\tau} + 1)^2], \quad \Phi_2 = \frac{1}{\mu - \lambda} [\mu^2 e^{\mu\tau} (e^{2\lambda\tau} - 1) - \lambda^2 e^{\lambda\tau} (e^{2\mu\tau} - 1)].$$

Выражения (4) и (5) при $\kappa = 0$ и $h = 0$ переходят в соответствующие формулы А. А. Андропова и Ю. И. Неймарка (1).

6. На рис. 2 изображены кривые, построенные по уравнению (4) при фиксированных значениях параметров α , β и a . Каждой точке кривой (4) соответствует устойчивая или неустойчивая инвариантная точка преобразования (3). Точкам кривой (4), расположенным „ниже“ кривой $\frac{2a}{p} = 2\tau^2 \frac{2-\beta}{\beta}$ (тонкий пунктир на рис. 2), соответствуют часы, работающие на встречных ударах балансира с ходовым колесом, а точкам, расположенным „выше“ кривой, соответствуют часы, работающие на подталкивающих ударах. Участки кривых (4), изобра-

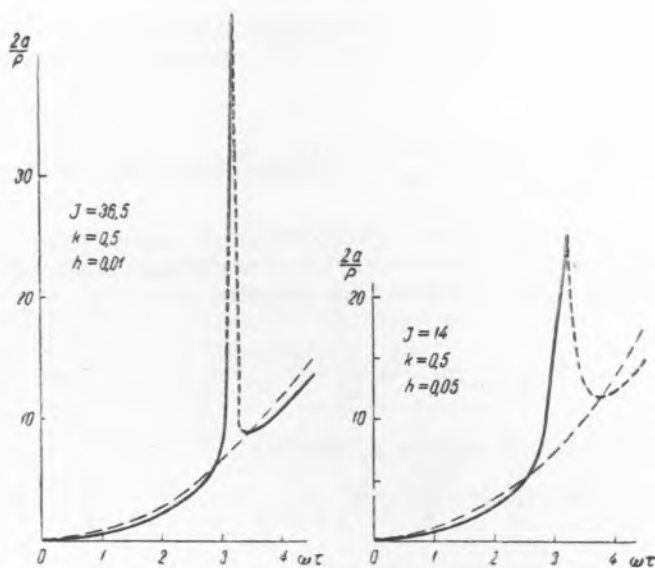


Рис. 2

женные на рис. 2 пунктиром, соответствуют неустойчивому режиму. Из чертежа видно, что, например, изменением параметра P_0 (приведенного момента на оси ходового колеса) можно по устойчивому участку кривой перейти от режима встречных ударов к режиму подталкивающих ударов.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
12 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Андронов и Ю. Неймарк, ДАН, 51, № 1 (1946).