Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. ДЕГТЕРЕВА

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАХ

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 19 IV 1948)

1. Попытка построить аналог основных понятий теории аналитических функций для линейных алгебр, не ограничивая области изменения независимого переменного ядром алгебры (ядро — коммутативная подалгебра данной алгебры), приводит к необходимости исходить из более широкого определения аналитической функции, чем принято в классической теории. Одним из таких определений является определение Хаусдорфа (1).

По Хаусдорфу, функция $f(z)$ от гиперкомплексного переменного z называется аналитической, если дифференциал df

$$df = \sum_{i=1}^{n} df_i e_i = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_j} dz_j \right) e_s , \tag{1}$$

существование которого предполагается, есть линейная однородная функция от дифференциала dz, следовательно, имеет вид:

$$df = \sum_{i=1}^{n} u_i dz v_i , \tag{2}$$

где u_i и v_i — функции гиперкомплексного переменного z.

Несложное преобразование приводит (Ринглеб) к определению в несколько иной форме (функция рассматривается над полем действительных чисел).

Функция $f(z)$ от гиперкомплексного переменного z называется аналитической функцией от z в точке z_0, если f_i $(i = 1, 2 \ldots, n)$ — действительные аналитические функции от $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и если дифференциал df (1) приводится к форме

$$df = \sum_{i, k=1}^{n} \varphi_{ik} e_i dz\, e_k . \tag{3}$$

где φ_{ik} — действительные функции действительных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Система линейно независимых дифференциалов $e_i dz\, e_k$, в которой число r дифференциалов максимально, называется дифференциальным базисом алгебры, r — рангом его.

Для числа r элементов дифференциального базиса имеет место неравенство: $n \leqslant r \leqslant n^2$. В коммутативных алгебрах, и только в них, $r = n$; в полных матричных алгебрах $r = n^2$.

При $r \neq n^2$ мы приходим к системе $n^2 - r$ линейных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка как обобщению коши-римановских дифференциальных уравнений.

Если алгебра коммутативна и порядок ее равен n, то ее дифференциальный базис состоит из n элементов:

$$dz\, e_1,\ dz\, e_2, \ldots,\ dz\, e_n\,,$$

и, следовательно,

$$df = \sum_{\tau=1}^{n} \varphi_\tau dz\, e_\tau\,.$$

2. Одним из первых вопросов, возникающих здесь, является вопрос о связи между функцией, аналитической в смысле Хаусдорфа, и функцией, аналитической в смысле Коши — Римана.

Можно доказать теорему:

Во всякой коммутативной алгебре функция $f(z)$, аналитическая в точке z в смысле Хаусдорфа, есть функция, дифференцируемая в этой же точке в смысле Коши — Римана.

Действительно, пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в точке z в смысле Хаусдорфа ($f(z)$ действительная функция действительных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$). Отсюда для коммутативных алгебр в этой точке выполняется тождество:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\,dz_j\right)e_i = \sum_{\tau=1}^{n}\varphi_\tau\left(\sum_{j=1}^{n} dz_j e_j\right)e_\tau. \tag{4}$$

Приравняем в обеих частях (4) члены с одинаковыми dz_p и dz_q:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_p}\,dz_p e_i = \sum_{\tau=1}^{n}\varphi_\tau dz_p e_p e_\tau\,;\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_q}\,dz_q e_i = \sum_{\tau=1}^{n}\varphi_\tau dz_q e_q e_\tau\,,\end{gathered} \tag{5}$$

т. е.

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_p}\,e_i = e_p\sum_{\tau=1}^{n}\varphi_\tau e_\tau\,;\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_q}\,e_i = e_q\sum_{\tau=1}^{n}\varphi_\tau e_\tau\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Умножив первое равенство на e_q, а второе на e_p, получаем окончательно:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_p}\,e_i e_q = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_q}\,e_i e_p\,. \tag{7}$$

Мы пришли к обобщенным уравнениям Коши — Римана в той же точке z, что и доказывает теорему.

3. Укажем обобщение уравнений Коши — Римана в направлении Хаусдорфа для некоторых некоммутативных алгебр, а именно VII, IX, XII, XII b, XV по классификации Стади.

Алгебра VII, $r=6$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_1}{\partial z_3}=\frac{\partial f_1}{\partial z_4}=\frac{\partial f_2}{\partial z_3}=\frac{\partial f_2}{\partial z_4}=\frac{\partial f_3}{\partial z_4}=\frac{\partial f_4}{\partial z_3}=0;\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\frac{\partial f_2}{\partial z_2};\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\frac{\partial f_2}{\partial z_1};\ \frac{\partial f_4}{\partial z_1}=\frac{\partial f_4}{\partial z_2};\ \frac{\partial f_4}{\partial z_4}=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2}{\partial z_1}.\end{gathered}\tag{8}$$

Алгебра IX, $r=6$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\frac{\partial f_2}{\partial z_2}=\frac{\partial f_3}{\partial z_3}=\frac{\partial f_4}{\partial z_4};\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\frac{\partial f_1}{\partial z_3}=\frac{\partial f_1}{\partial z_4}=\frac{\partial f_2}{\partial z_3}=\frac{\partial f_2}{\partial z_4}=\frac{\partial f_3}{\partial z_2}=\frac{\partial f_3}{\partial z_4}=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Алгебра XII — алгебра кватернионов и алгебра XII b, ранг дифференциального базиса $r=16$. Следовательно, любая функция $f(z)$, имеющая дифференциал

$$df=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\,dz_j\right)e_i,$$

есть функция, аналитическая в смысле Хаусдорфа.

Алгебра XV, $r=7$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_1}{\partial z_3}=\frac{\partial f_1}{\partial z_4}=\frac{\partial f_2}{\partial z_3}=\frac{\partial f_2}{\partial z_4}=\frac{\partial f_3}{\partial z_4}=\frac{\partial f_4}{\partial z_3}=0;\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\frac{\partial f_2}{\partial z_2};\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\frac{\partial f_2}{\partial z_1};\ \frac{\partial f_3}{\partial z_3}=\frac{\partial f_4}{\partial z_4}.\end{gathered}\tag{10}$$

Воронежский государственный
педагогический институт

Поступило
12 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Hausdorff, Ber. Verh. König. Sächs. Gesellsch. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., **52**, 43 (1900).