Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

СЛЕД В ОСНОВНЫХ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СЕРИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 V 1948)

В заметках [1—3] были приведены основные и дополнительные серии неприводимых унитарных представлений комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$. Операторам этих представлений, как унитарным операторам в бесконечномерном пространстве, нельзя, вообще говоря, приписать следа в обычном смысле. Для того чтобы приписать этим операторам след, перейдем от представлений группы к представлениям ее группового кольца.

Напомним, что групповое кольцо R состоит из выражений вида $a=\lambda e+x(g)$, где e — единица кольца R, а λ — скаляр; $x(g)$ — произвольная суммируемая функция на $\mathfrak{G}$. При этом сложение и умножение на скаляр определяются обычным образом, а умножение в R задается формулой

$$(\lambda_1 e+x_1)(\lambda_2 e+x_2)=\lambda_1\lambda_2 e+\lambda_2 x_1(g)+\lambda_1 x_2(g)+$$
$$+\int x_1(gg_1^{-1})\,x_2(g_1)\,d\mu(g_1);$$

инволюция в кольце R определяется по формуле

$$(\lambda e+x(g))^*=\bar{\lambda}e+\overline{x(g^{-1})}.$$

Если $g\to U_g$ — представление группы $\mathfrak{G}$, то

$$\lambda e+x\to U_{\lambda e+x}=\lambda E+\int x(g)\,U_g\,d\mu(g) \tag{1}$$

есть представление группового кольца R. Формула (1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между представлениями кольца R и унитарными представлениями группы $\mathfrak{G}$.

§ 1. След в невырожденных сериях. Пусть $g\to U_g$ — представление из основной или дополнительной невырожденной серии. Тогда из формулы (4) в [1] следует, что

$$U_x f(z)=\int x(g)\,U_g f(z)\,d\mu(g)=$$
$$=\int x(g)\,\beta^{-1/2}(zg)\,\chi(zg)\,f(z\bar{g})\,d\mu(g)=\int K(z,z')\,f(z')\,d\mu(z'),$$

где

$$K(z, z') = \int x(z^{-1}kz')\, \beta^{-1/2}(k)\, \chi(k)\, d\mu_e(k).$$

Поэтому след $S(U_x)$ оператора U_x равен

$$\int K(z, z)\, d\mu(z) = \int x(z^{-1}kz) \beta^{-1/2}(k)\, \chi(k)\, d\mu_e(k)\, d\mu(z).$$

В силу (5) в ([1]) мы получаем отсюда:

$$S(U_x) = \int x(g) \prod_{p \leqslant q} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^{-2} \sum \chi(k_g)\, d\mu(g) =$$

$$= \int x(g) \frac{\Sigma \chi(k_g)}{D(g)}\, d\mu(g), \tag{2}$$

где сумма в $\sum \chi(k_g)$ берется по всем k_g, которые получаются при всевозможных перестановках по главной диагонали собственных значений $\lambda_g^{(p)}$ матрицы g, а $D(g)$ есть дискриминант характеристического полинома матрицы g. Отсюда следует, что при надлежащем выборе функции $x(g)$ оператор U_x имеет след.

Пусть s — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$; обозначим через δ_s матрицу, которая получается из δ применением к ее диагональным элементам подстановки s. Положим $\chi_s(\delta) = \chi(\delta_s)$.

Перестановку s назовем **допустимой**, если она функцию $\chi(\delta)$ вида

$$\chi(\delta) = \prod_{j=1}^{r} |\delta_{2j-1}|^{m_j+\sigma_j+i\rho_j} \delta_{2j-1}^{-m_j} |\delta_{2j}|^{m_j-\sigma_j+i\rho_j} \delta_{2j}^{-m_j} \times$$

$$\times \prod_{j=2\tau+1}^{m} |\delta_j|^{m_j+i\rho_j} \delta_j^{-m_j}, \quad m_1 = 0, \quad 0 < \sigma_j < 1, \tag{3}$$

переводит в функцию $\chi_s(\delta)$ того же вида.

Пользуясь формулой (2) для следа, получаем следующую теорему:

Теорема. *Два представления $g \to U'_g$, $g \to U''_g$ основной невырожденной серии, соответствующие характерам χ' и χ'', эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторой перестановки s мы имеем $\chi'_s = \chi''$. Два представления $g \to U'_g$, $g \to U''_g$ дополнительной невырожденной серии, соответствующие функциям χ', χ'' вида (3), эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторой допустимой перестановки s имеем $\chi'_s = \chi''$.*

Представления дополнительной серии неэквивалентны представлениям основной серии.

Для $n = 2$ результаты этого параграфа изложены в ([4]).

§ 2. **След в вырожденных сериях.** Пусть теперь $g \to U_g$ представление одной из основных или дополнительных вырожденных серий, соответствующих разбиению $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ (см. ([3])).

Как и в § 1, получаем, что след $S(U_x)$ оператора U_x выражается формулой

$$S(U_x) = \int x(z^{-1}kz)\, \beta^{-1/2}(k)\, \chi(k)\, d\mu_e(k)\, d\mu(z) =$$

$$= \int x(zkz^{-1})\, \beta^{-1/2}(k)\, \chi(k)\, d\mu_e(k)\, d\mu(z), \tag{4}$$

где теперь K и Z — соответствующие обобщенные подгруппы.

Сделаем в последнем интеграле подстановку $g = zkz^{-1}$ и найдем якобиан соответствующего преобразования. Мы имеем:

$$gz = zk, \qquad dg\,z + g\,dz = dz\,k + z\,dk.$$

Отсюда $z^{-1}g^{-1}dg\,z = -z^{-1}dz + k^{-1}z^{-1}dz\,k + k^{-1}dk$, или

$$z^{-1}g^{-1}dg\,z = -z^{-1}dz + \zeta^{-1}\delta^{-1}z^{-1}dz\,\delta\zeta + k^{-1}dk. \tag{5}$$

Линейные преобразования $u \to z^{-1}uz$, $u \to \zeta^{-1}u\zeta$ в пространстве матриц имеют определитель, равный единице. Поэтому достаточно вычислить определитель преобразования $w'_{pq} = -w_{pq} + \delta_p^{-1}w_{pq}\delta_p$, $p > q$, где $(w_{pq}) = z^{-1}dz$. При фиксированных p и q это преобразование есть линейное преобразование в пространстве матриц w_{pq}. Так как преобразование $w_{pq} \to \delta_p^{-1}w_{pq}\delta_q$ есть кронекеровское произведение линейных преобразований δ_p^{-1} и δ_q, то искомый определитель равен $\prod |\lambda_{p,i}^{-1}\lambda_{q,j} - 1|^2$, где $\lambda_{p,i}$, $i = 1, \ldots, n_p$, — собственные значения матрицы δ_p, а произведение берется по всем i, j от 1 до n_p и от 1 до n_q соответственно, а затем по всем p и q, удовлетворяющим условию $p > q$.

Поэтому из формулы (5) следует, что

$$d\mu_e(k)\,d\mu(z) = \prod |\lambda_{p,i}^{-1}\lambda_{q,j} - 1|^2\,d\mu(g) =$$

$$= \frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}\,|\Lambda_2|^{2n_1}|\Lambda_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+\cdots+2n_r}\,d\mu(g), \tag{6}$$

где $k = \delta\zeta$.

Если подстановка собственных значений матрицы $[\delta_1, \ldots, \delta_r]$ только переставляет между собой собственные значения одной из матриц δ_j, то она не изменяет выражения в правой части (6). Совокупность всех таких подстановок образует подгруппу σ порядка $n_1!\,n_2!\ldots n_r!$ симметрической группы $\mathfrak{S}$ всех подстановок n собственных значений. Две подстановки из одного и того же левого класса смежности группы $\mathfrak{S}$ по подгруппе σ приводят к одному и тому же выражению (6), а различных классов — к вообще различным выражениям.

Подставляя выражение (6) в (4) и пользуясь выражением (1) в ([3]) для $\beta(k)$, мы получим окончательную формулу для следа представления вырожденной (основной или дополнительной) серии

$$S(U_x) = \int x(g)\left[\sum \chi(\delta)\,\frac{|D(\delta_1)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}\,|\Lambda_1|^{-n_1}\ldots|\Lambda_r|^{-n_r}\right]d\mu(g), \tag{7}$$

где $\delta = [\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r]$ — диагональная матрица из собственных значений матрицы g, а сумма состоит из $\dfrac{n!}{n_1!\ldots n_r!}$ слагаемых, соответствующих классам смежности группы $\mathfrak{S}$ по подгруппе σ.

Два представления вырожденных серий эквивалентны тогда, когда их следы совпадают. Отсюда, пользуясь формулой (7) для следа, можно получить теорему, аналогичную сформулированной в § 1.

Поступило
29 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, ДАН, 54, № 3 (1946). [2] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, ДАН, 56, № 1 (1947). [3] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, ДАН, 58, № 8 (1947). [4] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, № 5 (1947).