Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 V 1948)

1°. Пусть задана треугольная матрица узлов интерполирования

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\ x_2^{(n)} \ldots x_n^{n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \tag{1}$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant +1 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

и функция $f(x)$, определенная в интервале $[-1, 1]$.

Рассмотрим интерполяционный процесс $\{N_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, определяемый по закону

$$N_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x) \frac{2 \sin (2h+1) \arc \sin \frac{x - x_k^{(n)}}{2}}{(2h+1)\left(x - x_k^{(n)}\right)} f\left(x_k^{(n)}\right), \tag{2}$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\left(x - x_k^{(n)}\right)\omega_n'\left(x_k^{(n)}\right)}, \quad k=1, 2, \ldots, n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$\omega_n(x) = \left(x - x_1^{(n)}\right)\left(x - x_2^{(n)}\right)\ldots\left(x - x_n^{(n)}\right)$$

и h есть целочисленная функция от n, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \delta_1 < 2h/n < \delta_2 < 1, \tag{3}$$

где δ_1 и δ_2 — данные сколь угодно малые фиксированные числа. Этот интерполяционный процесс интересен тем, что у него отношение степени интерполяционного полинома $N_n(f, x)$ к числу узлов сколь угодно близко к единице, если только δ_2 достаточно мало.

Интерполяционный процесс $\{N_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ был введен в теорию интерполирования акад. С. Н. Бернштейном (1). С. Н. Бернштейн (1) доказал теорему:

Пусть матрица (1) — чебышевская и функция $f(x)$ непрерывна в интервале $[-1, 1]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (-1, 1)$ имеет место соотношение

$$N_n(f, x_0) \to f(x_0), \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

которое выполняется равномерно в любом интервале вида $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$.

2°. В настоящей заметке мы хотим распространить теорему С. Н. Бернштейна на некоторый класс матриц узлов (1).

Теорема 1. *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет следующему условию: для любого интервала* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, *существует конечное положительное число* c_1 *, *зависящее только от* ε, *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{n}[l_k^{(n)}(x)]^2 \leqslant c_1, \quad x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \quad n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

и пусть функция $f(x)$ *непрерывна в интервале* $[-1, 1]$.

Тогда интерполяционный процесс $\{N_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$, *построенный для матрицы* (1), *удовлетворяет в любой точке* $x_0 \in (-1, 1)$ *соотношению* (4), *которое выполняется равномерно в любом интервале вида* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$.

Очевидно, что для любого полинома $\Pi(x)$ при достаточно большом n имеет место тождество:

$$N_n(\Pi, x) \equiv \Pi(x).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(x)||\varphi_k(x)| \leqslant c_2, \quad x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon],$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{2\sin(2h+1)\arcsin\dfrac{x-x_k^{(n)}}{2}}{(2h+1)\left(x-x_k^{(n)}\right)}.$$

Из неравенства Коши и (5) следует

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(x)||\varphi_k(x)| \leqslant \sqrt{c_1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|^2}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|^2 < c_3, \quad x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]. \tag{6}$$

Пусть ** $x_p^{(n)} < x_0 < x_{p+1}^{(n)}$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(x_0) = \sum_{k=1}^{p}\varphi_k^2(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n}\varphi_k^2(x_0).$$

Мы будем рассматривать $\sum\limits_{k=p+1}^{n}$, ибо рассуждения для $\sum\limits_{k=1}^{p}$ аналогичны.

Так как

$$|\varphi_{p+1}(x_0)| \leqslant 1,$$

* Мы будем в дальнейшем через $c_1, c_2, \ldots$ обозначать положительные числа, зависящие лишь от ε.

** Если x_0 — узел, то сумма из неравенства (6) равна 1.

то

$$\sum_{k=p+1}^{n} \varphi_k^2(x_0) \leqslant 1 + \sum_{k=p+2}^{n} \varphi_k^2(x_0). \qquad (7)$$

Сумму $\sum\limits_{k=p+2}^{n}$ разбиваем следующим образом:

$$\sum_{k=p+2}^{n} \varphi_k^2(x_0) = \sum_{x_k^{(n)}-x_0<\varepsilon/2}{}' \varphi_k^2(x_0) + \sum_{x_k^{(n)}-x_0\geqslant\varepsilon/2}{}'' \varphi_k^2(x_0). \qquad (8)$$

Из неравенства (3) следует, что

$$\sum{}'' \varphi_k^2(x_0) \leqslant \frac{16}{\varepsilon^2} \frac{n}{(2h+1)^2} < \frac{16}{\varepsilon^2\delta_1}. \qquad (9)$$

Для оценки $\sum'$ заметим, что из неравенства (5) следует

$$|l_k^{(n)}(x)| \leqslant \sqrt{c_4}, \quad x \in \left[-1+\frac{\varepsilon}{4},\ 1-\frac{\varepsilon}{4}\right], \quad k=1,2,\ldots,n, \quad n=1,2,\ldots;$$

поэтому существует такое число ([2]) $c_5 > 0$, что расстояние между двумя соседними узлами из интервала $\left[-1+\frac{\varepsilon}{4},\ 1-\frac{\varepsilon}{4}\right]$ не меньше $\frac{c_5}{n}$. Следовательно, если $x_k^{(n)} - x_0 < \varepsilon/2 \quad (k = p+2, \ldots, m)$, то $x_k^{(n)} - x_{p+1}^{(n)} \geqslant (k-p-1)\, c_5/n$.

Таким образом, из последнего неравенства и из (3) следует, что

$$\sum{}' \left[\frac{2\sin(2h+1)\arcsin\dfrac{x_0-x_k^{(n)}}{2}}{(2h+1)(x_0-x_k^{(n)})}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=p+2}^{m} \frac{4n^2}{(2h+1)^2(k-p-1)^2c_5} \leqslant \frac{c_6}{\delta_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}. \qquad (10)$$

Из (7), (8), (9), (10) следует, что

$$\sum_{k=p+1}^{n} \varphi_k^2(x_0) < c_7.$$

Итак, теорема 1 доказана.

3°. Применим теорему 1 к якобиевским матрицам *.

---

* Матрица (1) называется якобиевской, если ее n-я строчка составлена из корней полинома Якоби $J_n(x, \alpha, \beta)$ $(n=1,2,\ldots)$, где

$$J_n^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right].$$

При таком определении случай $\alpha=\beta=-1$ не исключен.

Теорема 2. *Пусть матрица* (1) *якобиевская с параметрами* $\alpha \geqslant -1$, $\beta \geqslant -1$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале* $[-1, 1]$.

Тогда в любой точке $x_0 \in (-1, 1)$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} N_n(f, x_0) = f(x_0).$$

Сходимость равномерная в любом интервале $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$.

Действительно, при помощи асимптотических формул для полиномов Якоби можно доказать, что для якобиевской матрицы выполняется неравенство (5).

Заметим, что если параметры α и β удовлетворяют неравенствам $-1 \leqslant \alpha < 0$, $-1 \leqslant \beta < 0$, то для получения неравенства (5) нет надобности пользоваться асимптотическими формулами для полиномов Якоби.

В этом случае имеет место неравенство Фейера ([3])

$$\sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 < \max\left[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

и, следовательно, неравенство (5) выполняется.

G. Szegö ([4]) и J. Shohat доказали, что интерполяционный процесс Эрмита, построенный для якобиевской матрицы с параметрами $\alpha \geqslant -1$, $\beta \geqslant -1$ и непрерывной в интервале $[-1, 1]$ функции, сходится в каждой точке $x \in (-1, 1)$.

Теорема 2 показывает, что даже когда отношение степени интерполяционного полинома к числу узлов сколь угодно близко к единице, можно построить интерполяционный процесс с такой же сходимостью для того же класса якобиевских матриц.

Поступило
3 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 4, **5**, стр. 49 (1932). [2] P. Erdös u. P. Turán, Ann. of Math., **41**, 510 (1940). [3] L. Fejer, Math. Ann. **106**, 1 (1932). [4] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, 1939, p. 333.