Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 1 IV 1948)

Мы будем рассматривать центрально-симметричные движения газа, учитывая переменность энтропии.

Исходную систему уравнений напишем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln \rho}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nu}{r}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial (p/\rho^{\gamma})}{\partial t}+u\frac{\partial (p/\rho^{\gamma})}{\partial r}=0.$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, u — скорость газа; $N=0$ в случае одноразмерных движений; $N=1$ в случае плоских движений; $N=2$ в случае движений со сферической симметрией. Введем $w=p/\rho$; тогда после некоторых преобразований уравнения примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial \ln \rho}{\partial r}=0.$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln \rho}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nu}{r}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \ln w}{\partial t}+u\frac{\partial \ln w}{\partial r}+(\gamma-1)\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nu}{r}\right]=0.$$

Далее введем: $u=x\frac{r}{t}$, $w=y\frac{r^2}{t^2}$, что дает:

$$\dot{x}-x+xx'+y'+x^2+2y+y\frac{\rho'}{\rho}=0,$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho}+x\frac{\rho'}{\rho}+x'+(N+1)x=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\dot{y}}{y}+x\frac{y'}{y}+(\gamma-1)[x'+(N+1)x]+2(x-1)=0.$$

Здесь, например, $\dot{x}=\partial x/\partial \ln t$, $x'=\partial x/\partial \ln r$.

Система уравнений (3) позволяет весьма просто найти решения для нового класса самоподобных (автомодельных) движений газа.

Эти решения могут быть с успехом применены при решении ряда астрофизических задач.

Самоподобными движениями мы называем такие движения, для которых распределение параметров по r меняется подобно самим себе в зависимости от времени. Допустим, что

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \rho = r^a \eta(t).$$

Тогда:

$$\dot{x} - x + x^2 + (2 + a) y = 0, \quad \frac{\dot{\eta}}{\eta} + (N + a + 1) x = 0,$$

$$\frac{\dot{y}}{y} + (N(\gamma - 1) + \gamma + 1) x - 2 = 0. \tag{4}$$

Отсюда:

$$-\frac{dx}{d \ln t} = \frac{dx}{d \ln y} [(N(\gamma - 1) + \gamma + 1) x - 2] = x^2 + (2 + a) y - x, \tag{5}$$

что дает:

$$F_1(x, y, c_1) = 0, \qquad t = F_2(x, y, c_1, c_2).$$

Второе из уравнений (4) дает: $\eta = F_3(x, y, c_1, c_2, c_3)$.

Вводя вместо t $t + \tau$, в результате получаем решения, зависящие от 5 констант: c_1, c_2, c_3, a, τ. Найденные решения определяют:

$$u = r\,\xi(t), \quad \rho = r^a \eta(t), \quad p = r^{a+2} \sigma(t). \tag{6}$$

Аналогично, полагая $x = x(r)$, $y = y(r)$, $\rho = t^b \eta(r)$, найдем:

$$xx' + y' + x^2 + 2y - x + y \frac{\eta'}{\eta} = 0,$$

$$b + x \frac{\eta'}{\eta} + x' + (N + 1) x = 0,$$

$$(\gamma - 1) x' + x \frac{y'}{y} + (N(\gamma - 1) + \gamma + 1) x - 2 = 0. \tag{7}$$

Отсюда, исключая η' / η, найдем:

$$\frac{-d \ln r}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dx} + x + y}{x^2 - x - b \dfrac{y}{x} - (N - 1) y} = \frac{\dfrac{x}{y} \dfrac{dy}{dx} + (\gamma - 1)}{(N(\gamma - 1) + \gamma + 1) x - 2}. \tag{8}$$

В результате снова получаем решения, зависящие от 5 постоянных. Решения дают:

$$u = \xi(r) / t, \qquad \rho = t^b \eta(r), \qquad p = t^{b-2} \sigma(r). \tag{9}$$

Система уравнений (2) позволяет также весьма просто найти уже известные ([1,2]) самоподобные (автомодельные) движения газа.

Положим, что $x = x(z)$, $y = y(z)$, $\rho = t^{a_2} \eta(z)$, где $z = r t^{-a_1}$.

Тогда уравнения примут вид:

$$x'(x - a_1) + 2y - x + x^2 + y' + y \frac{\eta'}{\eta} = 0,$$

$$\frac{\eta'}{\eta}(x - a_1) + a_2 + x' + (N + 1) x = 0, \tag{10}$$

$$\frac{y'}{y}(x - a_1) + (\gamma - 1) x' + (N(\gamma - 1) + \gamma + 1) x - 2 = 0.$$

Здесь производные берутся по $d \ln z$.

Исключая из первых двух соотношений η' / η, найдем:

$$\frac{d \ln z}{dx} = \frac{(a_1 - x)\dfrac{d \ln y}{dx} - (\gamma - 1)}{(N(\gamma - 1) + \gamma + 1)\, x - 2} =$$

$$= \frac{(a_1 - x)^2 - \gamma y}{y\,(2\,(a_1 - 1) + a_2 + \gamma\,(N + 1)\, x) - x\,(1 - x)\,(a_1 - x)} \,. \tag{11}$$

Анализируя это решение, мы видим, что полное решение зависит от 6 констант $c_1, c_2, c_3, \tau, a_1, a_2$, т. е. формально дает полный интеграл системы (2). Автомодельные движения, как мы видим, характеризуются зависимостями:

$$u = t^{a_1 - 1}\xi(z), \qquad \rho = t^{a_2}\,\eta(z), \qquad p / \rho^{\gamma} = t^{a_3}\,\sigma(z), \tag{12}$$

где $a_3 = 2\,(a_1 - 1) - a_2\,(\gamma - 1)$.

Данная форма решения для автомодельных движений удобна для решения не всех типичных задач, поэтому мы укажем еще на один прием, который позволяет расширить класс решаемых задач, имеющих физический смысл.

Полагая, что

$$a_1 z - \xi = \varphi(z), \tag{13}$$

найдем, что система (1) в этих переменных примет вид:

$$\varphi\,(2a_1 - 1 - \varphi') = a_1\,(a_1 - 1)\, z + \eta^{\gamma - 1}\,\sigma\left(\gamma\,\frac{\eta'}{\eta} + \frac{\sigma'}{\sigma}\right),$$

$$\varphi' + N\,\frac{\varphi}{z} + \frac{\eta'}{\eta}\,\varphi = a_2 + (N + 1)\, a_1, \tag{14}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\,\varphi = a_3 = 2\,(a_1 - 1) - (\gamma - 1)\, a_2.$$

Исключая из первых двух уравнений (14) с помощью третьего $dz = \dfrac{\varphi}{a_3}\,\dfrac{d\sigma}{\sigma}$, получим:

$$a_3\, d\varphi + a_3\,\frac{\sigma}{\varphi}\,\eta^{\gamma - 1}\left(\gamma\,\frac{d\eta}{\eta} + \frac{d\sigma}{\sigma}\right) = [(2a_1 - 1)\,\varphi - a_1\,(a_1 - 1)\, z]\,\frac{d\sigma}{\sigma}\,, \tag{15}$$

$$\frac{d\eta}{\eta} + \frac{d\varphi}{\varphi} + N\,\frac{dz}{z} = a\,\frac{d\sigma}{\sigma}\,. \tag{16}$$

Выражение (16) интегрируется и дает:

$$\eta\varphi z^{N}\,\sigma^{-a} = A; \tag{17}$$

здесь $a = \dfrac{a_2 + (N + 1)\, a_1}{a_3}$.

Определяем отсюда η и $\gamma\,\dfrac{d\eta}{\eta} = \gamma\left(a\,\dfrac{d\sigma}{\sigma} - \dfrac{d\varphi}{\varphi} - N\,\dfrac{dz}{z}\right)$ и, подставляя в (15), имеем:

$$d\varphi + \frac{\sigma}{\varphi}\left(\frac{A\sigma^{a}}{\varphi z^{N}}\right)^{\gamma - 1}\left[(a\gamma + 1)\,\frac{d\sigma}{\sigma} - \gamma\,\frac{d\varphi}{\varphi} - \gamma N\,\frac{dz}{z}\right] =$$

$$= \frac{(2a_1 - 1)\,\varphi - a_1\,(a_1 - 1)\, z}{a_3}\,\frac{d\sigma}{\sigma}\,.$$

Вместо φ и $d\varphi$ подставим: $\varphi = a_3 \sigma \frac{dz}{d\sigma}$, $d\varphi = a_3\left(dz + \sigma d\sigma \frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)$, будем иметь:

$$a_3^2(\sigma^2 z'' + \sigma z') + \left(\frac{A}{a_3}\right)^{\gamma-1} z^{-N(\gamma-1)} \sigma^{(a_1-1)(\gamma-1)} z'^{1-\gamma} \times$$
$$\times \left(a\gamma + 1 - \gamma \frac{\sigma^2 z'' + \sigma z'}{\sigma z'} - \frac{N\gamma}{z} \sigma z'\right) = (2a_1 - 1) a_3 \sigma z' - a_1(a_1 - 1) z.$$

Поскольку $\sigma z' = z'$, $\sigma^2 z'' + \sigma z'' = z''$ (где производные берутся по $d \ln \sigma$), будем иметь:

$$a_3^2 z'' + \left(\frac{A}{a_3}\right)^{\gamma-1} z^{-(\gamma-1)N} \sigma^{a(\gamma-1)+1} z'^{1-\gamma} \left(a\gamma + 1 - \gamma \frac{z''}{z'} - N\gamma \frac{z'}{z}\right) =$$
$$= (2a_1 - 1) a_3 z' - a_1(a_1 - 1) z. \tag{18}$$

Это уравнение в частности позволяет решать задачу об отражении плоских ударных волн переменной энтропии, двигающихся с постоянной скоростью. В самом деле, полагая $N = 0$, $a_1 = 1$, найдем, что

$$a_3^2 z_1' + \left(\frac{A}{a_2}\right)^{\gamma-1} \sigma^{-\frac{1}{a_2}} z_1^{1-\gamma} \left(a\gamma + 1 - \gamma \frac{z_1'}{z_1}\right) = a_3 z_1, \tag{19}$$

где $z_1 = z'$.

Далее уравнение элементарно интегрируется, а решение всей задачи может быть доведено до конца. Рассмотрим еще один класс точных решений, когда $p = p(t)$. Для этой цели обратимся к исходной системе (1). Уравнение Эйлера при этом дает:

$$r = ut + F(u). \tag{20}$$

Уравнение сохранения массы и энергии преобразуем к независимым переменным (t, u); тогда они примут вид:

$$-\left(1 + \frac{Nu}{r} \frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\partial \ln \rho}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial u} =$$
$$= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\partial \ln p}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial \ln p}{\partial u}\right).$$

Принимая во внимание (20), получим:

$$-\left(\frac{Nu}{ut + F} + \frac{1}{t + F'}\right) = \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial t}. \tag{21}$$

Отсюда

$$\rho = \varphi_1(u) r^{-N} (t + F')^{-1}, \qquad p = \varphi_2(u) r^{-\gamma N} (t + F')^{-\gamma}. \tag{22}$$

Для того чтобы выполнялось требование $p = p(t)$, необходимо допустить, что

$$F(u) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} r_0 - ut_0, \qquad \varphi_2 = u^{\gamma N} \mathrm{const} = Au^{\gamma N}.$$

Тогда

$$\rho = \varphi_1(u)(t - t_0)^{-(N+1)}, \qquad p = A(t - t_0)^{-\gamma(N+1)}.$$

Если рассматривать решения (20) и (21) как приближенные, что расширяет класс решимых задач, мы не будем удовлетворять уравнению сохранения импульса, однако ошибка, допускаемая при этом, может быть сделана достаточно малой.

Поступило
29 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, ДАН, 47, № 2 (1945). [2] К. П. Станюкович, ДАН, 48, № 5 (1945).