Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

ГИДРОМЕХАНИКА

Ф. Б. НЕЛЬСОН-СКОРНЯКОВ

ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕРЕЗ ПЛОТИНЫ И ДАМБЫ С ЯДРОМ ИЛИ ЭКРАНОМ (ОСНОВАНИЕ ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОЕ)

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 7 IV 1948)

В ответственных намывных и полунамывных водохранилищных плотинах и дамбах ядро составляет важнейшую часть сооружения [5].

Откосы плотины, покрывающие ядро со стороны верхнего и нижнего бьефов, выполняются из грубого крупнозернистого материала, обладающего весьма большим коэффициентом фильтрации, превосходящим в согни и тысячи раз коэффициент фильтрации материала ядра. Поэтому можно пренебречь влиянием этих откосов плотины на фильтрацию и исследовать движение грунтового потока только через малопроницаемое ядро (рис. 1).

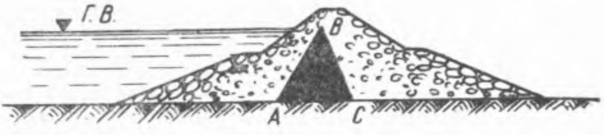

Рис. 1

В работах [2,3] нами была изучена фильтрация через ядро, имеющее форму равнобедренного треугольника с углом при вершине, равным $\pi/2$, или прямоугольного треугольника, у которого угол, образуемый напорным откосом и непроницаемым основанием, равен $\pi/2$ или 0 [4].

В этой работе излагается общее решение задачи на фильтрацию без свободной поверхности через ядро или экран произвольной треугольной формы ($\gamma \leqslant \pi/2$).

Мы исследуем максимальную задачу, принимая отметку горизонта воды перед ядром равной отметке вершины ядра, т. е. $H_{\text{воды}} = H_{\text{ядра}}$.

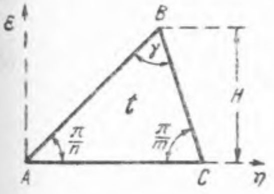

Рис. 2а

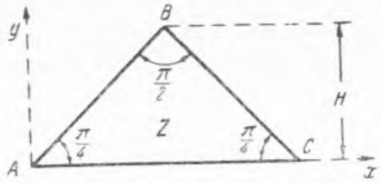

Рис. 2б

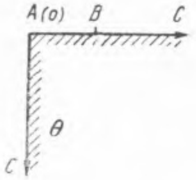

Рис. 2в

Ядро произвольной треугольной формы при $\gamma \leqslant \pi/2$ (рис. 2а). Для нахождения комплексного потенциала течения $w=\varphi+i\psi$ и расхода Q в исследуемой области течения t (рис. 2а) мы применим следующий метод.

Комплексный потенциал течения в области z через ядро, представляющее равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным $\pi/2$ (рис. 2б), определяется выражением [3]:

$$w=\varphi+i\psi=\frac{k}{4H}z^2-kH, \tag{1}$$

где k — коэффициент фильтрации грунта.

Потенциал скоростей и функция тока равны:

$$\varphi = \frac{k}{4H}(x^2 - y^2) - kH, \tag{2}$$

$$\psi = \frac{k}{2H} xy. \tag{3}$$

Отобразив конформно область z (рис. 2б) на область t (рис. 2а) при помощи правого квадранта нижней полуплоскости θ (рис. 2в), найдем аналитическую связь между z и t:

$$z = f(t). \tag{4}$$

Поставив (4) в (1), найдем комплексный потенциал течения в области t.

Конформное отображение области z на область t дает функция

$$z = t \left\{ \frac{4}{n} \theta^{\frac{n-4}{2n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{m+n}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \right.$$

$$\times \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + 1\right) + i\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1\right)\right] \times$$

$$\left. \times \left[\frac{1 + 0{,}1\,\theta^2 + 0{,}041\,\theta^4 + \ldots}{1 + \frac{m+n}{mn(n+1)}\theta^2 + \frac{(m+n)(m+n+mn)}{m^2n^2(2n+1)\,2!}\theta^4 + \ldots}\right] \right\} \text{ при } |\theta| < 1, \tag{5}$$

где $\Gamma(\ \ )$ — гамма-функции.

Подставив (5) в (1), получим для области течения t:

$$w = \varphi + i\psi = \frac{k}{4H} t^2 N^2 - kH, \tag{6}$$

где через N обозначен коэффициент при t в уравнении (5).

Отделив вещественные и мнимые части в уравнении (5), получим при чисто вещественных значениях θ:

$$x = \left[\eta\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + 1\right) - \varepsilon\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1\right)\right] M, \tag{7}$$

$$y = \left[\eta\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1\right) + \varepsilon\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + 1\right)\right] M, \tag{8}$$

где

$$M = \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{m+n}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \theta^{\frac{n-4}{2n}} \times$$

$$\times \left\{\frac{1 + 0{,}1\,\theta^2 + 0{,}041\,\theta^4 + \ldots}{1 + \frac{m+n}{mn(n+1)}\theta^2 + \frac{(m+n)(m+n+mn)}{m^2n^2(2n+1)\,2!}\theta^4 + \ldots}\right\}. \tag{9}$$

Подставив (7) и (8) в (2) и (3), получим выражения для потенциала скоростей и функции тока в области течения t:

$$\psi = \left[\eta\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + 1\right) - \varepsilon\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1\right)\right]\left[\eta\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - 1\right) + \right.$$

$$+\varepsilon\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+1\right)\Big]M^2\frac{\tilde{k}}{2H}, \tag{10}$$

$$\varphi=\frac{k}{4H}(x^2-y^2)-kH, \tag{11}$$

где x и y выражаются уравнениями (7) и (8).

Комплексную скорость на границе AB найдем, взяв производную в уравнении (6):

$$dw/dt=v_\eta-iv_\varepsilon\,. \tag{12}$$

По уравнениям (10) и (11) можно построить кривые функции φ и ψ для границ AB и BC, а следовательно, и линии тока.

Для границы CB $\theta>1$, поэтому для этой границы необходимо произвести преобразование области θ инверсией $\xi=1/\theta$. Тогда в области ξ для границы CB будет $0<\xi<1$, и ряды уравнений, аналогичных уравнениям (5) — (11), сходятся быстро.

Расход воды Q, фильтрующий через треугольное ядро, найдем, написав уравнение (10) для точки B, координаты которой в области t равны: $\eta_B=H\operatorname{ctg}(\pi/n)$, $\varepsilon_B=H$ и $\theta=1$:

$$Q=kH\frac{8}{n^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m+n}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2\times$$
$$\times\left\{\frac{1+0{,}1+0{,}041+0{,}024+\ldots}{1+\frac{m+n}{mn(n+1)}+\frac{(m+n)(m+n+mn)}{m^2n^2(2n+1)\,2!}+\ldots}\right\}^2. \tag{13}$$

Все значения Q для частных случаев легко получаются из уравнения (13) при подстановке в него соответствующих значений m и n. Для примера дадим формулы для Q для симметричного ядра и ядра с вертикальным низовым откосом.

А. Симметричное ядро. В этом случае $m=n$.

Из общей формулы (13) находим:

$$Q=kH\frac{8}{n^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2\times$$
$$\times\left\{\frac{1+0{,}1+0{,}041+0{,}024+\ldots}{1+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{2(2+n)}{n^2(2n+1)\,2!}+\frac{2^2(n+1)(n+2)}{n^3(3n+1)\,3!}+\ldots}\right\}^2. \tag{14}$$

Например, пусть $m=n=3$. Тогда $Q=0{,}83\ kH$.

В. Ядро с вертикальным низовым откосом. В этом случае $m=2$. Из общей формулы (13) находим:

$$Q=kH\frac{8}{n^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2+n}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^2\times$$
$$\times\left\{\frac{1+0{,}1+0{,}041+0{,}024+\ldots}{1+\frac{(2+n)}{2n(n+1)}+\frac{(2+n)(2+3n)}{2^2n^2(2n+1)\,2!}+\frac{(2+n)(2+3n)(2+5n)}{2^3n^3(3n+1)\,3!}+\ldots}\right\} \tag{15}$$

Например, пусть $n=4$. Тогда $Q=1{,}3\ kH$.

Интересные результаты дало сравнение величин расходов для симметричного ядра, вычисленных по точной формуле (14) и по гидравлической формуле

$$Q = kI_{\text{средн}}\,\omega = k\left(\frac{H}{2H\operatorname{ctg}(\pi/n)}\right)H = \frac{kH}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (16)$$

Оказалось, что величины расходов для симметричного ядра, вычисленные по гидравлической формуле (16), абсолютно совпадают с точными значениями Q по формуле (14). Этот результат имеет существенное значение при построении приближенных гидравлических решений для сложных профилей плотин.

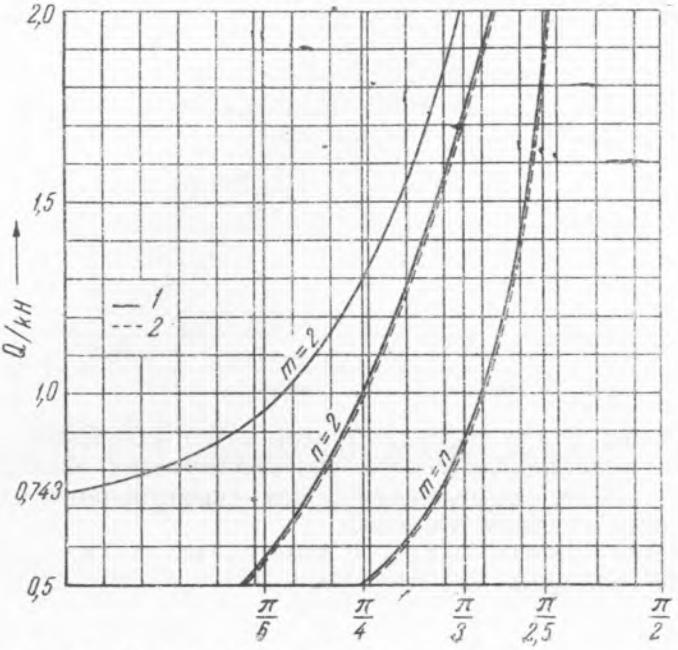

Рис. 3. График $Q/kH = f(m, n)$. 1 — точное решение, 2 — гидравлическое решение

На рис. 3 даются графики $Q/kH = f(m, n)$ для симметричного ядра, для ядра с вертикальным напорным откосом и для ядра с вертикальным низовым откосом.

В случае наличия воды в нижнем бьефе ядра задача решается аналогичным методом.

Поступило
27 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, 1947. [2] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины, М., 1936. [3] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Фильтрация в однородной среде, М., 1947. [4] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, ДАН, 28, № 6 (1940). [5] М. М. Гришин, Гидротехнические сооружения, М., 1947.