Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

МАТЕМАТИКА

З. И. ХАЛИЛОВ

ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НОРМИРОВАННОМ КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 IV 1948)

В статье рассматривается класс линейных уравнений в нормированном кольце И. М. Гельфанда [1]*.

1. Пусть R есть нормированное кольцо элементов $x, y, \ldots$ Рассмотрим множество F линейных операторов T, отображающих кольцо R в его часть. Предположим, что для каждого оператора T из F для $E+T$ имеет место теория Рисса — Шаудера**. Такой оператор T будем называть регулярным. Предположим, что если T, T_1 взяты из множества F, то xT, Tx, где $x \in R$, $T+T_1$, $T \cdot T_1$ также входят в F.

Определение 1. Множество линейных операторов с вышеуказанными свойствами назовем классом регулярных операторов.

Рассмотрим линейный оператор S, действующий в нормированном кольце R и удовлетворяющий условиям: 1) $S^2 = E$, где E — тождественное преобразование; 2) оператор $(Sx - xS)$, где x — произвольный элемент из R, есть регулярный оператор, входящий в класс F.

Определение 2. Линейный оператор S, удовлетворяющий вышеуказанным условиям, будем называть сингулярным.

Определение 3. Если композиции ST и TS, где T — произвольный регулярный оператор из F и S — сингулярный оператор, входят в класс F, то оператор S будем называть корректным по отношению к классу F.

Пример. Примером S может служить оператор [4]

$$S(\varphi) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t_1)\, dt_1}{t_1 - t}, \tag{1}$$

действующий в кольце H_μ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\geqslant \mu$, где L состоит из конечного числа замкнутых простых гладких линий на комплексной плоскости $z = x + iy$. Норма в H_μ определена равенством:

$$\|\varphi\| = \max_{t \in L} |\varphi(t)| + \max_{t_1, t_2 \in L} \left| \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{|t_1 - t_2|^\mu} \right|. \tag{2}$$

* Теория линейных уравнений с сингулярным оператором в определенном нормированном кольце, называемом унитарным кольцом, рассмотрена автором в статье [2].

** О необходимых и достаточных условиях, при которых для оператора $x - T(x)$ имеет место теория Рисса — Шаудера, см. [3].

Совокупность операторов

$$T(\varphi) \equiv \int_L \frac{K(t, t_1)\,\varphi(t_1)\,dt_1}{|t_1 - t|^{\alpha}}, \qquad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{3}$$

где $K(t, t_1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Гельдера относительно t, t_1 на L, составляет класс регулярных операторов типа F, причем (1) корректный по отношению к классу (3).

В дальнейшем будем предполагать, что сингулярный оператор S корректный по отношению к классу F.

Теорема 1. *$Sx(y) = xS(y) + T(y)$, где $T \in F$.*

Теорема 2. *$SxS(y) = xy + T(y)$, где $T \in F$ (формула Пуанкаре — Бертрана).*

Теорема 3. *Если $S(x) = y$, то $x = S(y)$.*

Следствия. *Оператор S преобразует кольцо R само на себя. Оператор S и всякая его итерация не являются вполне непрерывными операторами.*

2. Рассмотрим сингулярное уравнение:

$$K(x) = ux + vS(x) + T(x) = y, \tag{4}$$

где u, v, y — заданные элементы $\in R$; x — искомый элемент $\in R$; S — сингулярный оператор; T — какой-либо линейный оператор из F. Если $v=0$, то уравнение (4) есть уравнение Рисса — Шаудера, если u имеет обратный элемент *.

Оператор

$$K^*(x) \equiv ux + vS(x) \tag{5}$$

будем называть характеристической частью оператора K. Будем предполагать, что уравнение (4) нормальное, т. е. элементы $U = u + v$, $V = u - v$, называемые основными элементами оператора (4), имеют обратные элементы.

Рассмотрим оператор

$$K_1(x) = u_1 x + v_1 S(x) + T_1(x). \tag{6}$$

Теорема 4. *Композиции K_1K и KK_1 являются операторами типа K, причем, если, например, $K_0 = K_1K$, то*

$$u_0 = u_1 u + v_1 v, \qquad v_0 = u_1 v + v_1 u \tag{7}$$

(аналогичное имеет место для KK_1).

Если

$$u_1 = \frac{1}{2} U_0 [U^{-1} + V^{-1}], \qquad v_1 = \frac{1}{2} U_0 [U^{-1} - V^{-1}], \tag{8}$$

где U_0 — произвольный элемент $\in R$, имеющий обратный, то оператор (6) будет регуляризатором оператора K, т. е. K_1K будет регулярным оператором.

3. Оператор

$$\overline{K}(X) \equiv \overline{u}(X) + \overline{S}\,\overline{v}(X) + \overline{T}(X) \tag{9}$$

будем называть сопряженным с K, где $\overline{u}, \overline{v}, \overline{S}$ и $\overline{T}$ суть операторы, сопряженные с операторами u, v, S и T в смысле определения Шаудера ([5], [6]); X — линейный функционал, определенный в R.

---

* В R существуют элементы, имеющие обратные, см. ([1]).

Теорема 5. *Оператор $\overline{K}$, сопряженный с K, нормален.*

Теорема 6. *$\overline{S}$ — линейный сингулярный оператор, действующий в сопряженном пространстве $\overline{R}$ и корректный по отношению к классу $\overline{F}$ регулярных операторов $\overline{T}$, если в условиях S и F x заменить оператором $\overline{x}$.*

Уравнение

$$\overline{K}(X)=Y \tag{10}$$

при любом Y будем называть союзным с (4). Нетрудно доказать, что если

$$\overline{u}_1=\frac{1}{2}\,\overline{U}_0\,[\overline{U}^{-1}+\overline{V}^{-1}], \qquad \overline{v}_1=\frac{1}{2}\,\overline{U}_0\,[\overline{U}^{-1}-\overline{V}^{-1}], \tag{11}$$

то

$$\overline{K_1}(X)\equiv\overline{u_1}\,(X)+\overline{S}\,\overline{v}_1(X)+\overline{T}_1(X) \tag{12}$$

есть регуляризатор союзного уравнения (9).

4. Теоремы Ф. Нетера([3, 7]) для нашего уравнения (4) обобщаются следующим образом.

Теорема I. *Число линейно независимых решений однородного сингулярного уравнения*

$$K(x)=0 \tag{13}$$

$$(\textit{соответственно}\ \ \overline{K}(X)=0) \tag{14}$$

конечно.

Теорема II. *Для существования решения сингулярного уравнения*

$$K(x)=y \tag{15}$$

$$(\textit{соответственно}\ \ \overline{K}(X)=Y) \tag{16}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$X_i(y)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k' \tag{17}$$

$$(\textit{соответственно}\ Y(x_i)=0, \qquad i=1, 2,\ \ldots,\ k), \tag{18}$$

где X_i, $i=1, 2, \ldots, k'$, — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения

$$\overline{K}(X)=0 \tag{19}$$

(*соответственно x_i, $i=1, 2, \ldots, k$, — полная система линейно независимых решений однородного уравнения* (13)).

Теорема III. *Разность числа k линейно независимых решений однородного уравнения* (13) *и числа k' линейно независимых решений союзного однородного уравнения* (14) *зависит лишь от характеристической части оператора K.*

Доказательство теоремы I очевидно.

Доказательство теоремы II. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть K_1 — регуляризатор K. Всякое решение уравнения

$$K_1K(x)=K_1(y) \tag{20}$$

является решением уравнения

$$K(x)=y+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,y_i, \tag{21}$$

где y_i — полная система линейно независимых решений уравнения $K_1(y)=0$. Тогда всякое решение (20) будет решением (15), если все $\lambda_i=0$. Это необходимо и достаточно.

В силу теоремы III работы ([4]) для разрешимости (20) необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{K}_1(Z_i)(y)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, \nu, \tag{22}$$

где Z_i — полная система линейно независимых решений $\overline{K_1 K}(Z)=0$.

Пусть выполнены условия (22). Тогда (20) имеет общее решение:

$$x=\Gamma K_1(y)+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i \xi_i, \tag{23}$$

где Γ — определенный линейный оператор, ξ_i — полная система линейно независимых решений $K_1 K(x)=0$, α_i — произвольные комплексные числа.

Пусть теперь Y_i, $i=1, 2, \ldots, \nu$, — функционалы, удовлетворяющие условиям *:

$$Y_i(y_i)=0 \qquad (\delta_{ij}=0, \quad i\neq j, \quad \delta_{ii}=1). \tag{24}$$

В силу (24) из (21) имеем $\lambda_i=Y_i[K(x)-y]$.

Вносяя в последнее x из формулы (23), получаем:

$$\lambda_i=\mu_i+\sum_{j=1}^{\nu}A_{ij}\alpha_j, \tag{25}$$

где $\mu_i=Y_i^*(y)$, Y_i^* обозначает определенные линейные функционалы, не зависящие ни от y, ни от чисел α_i.

Нетрудно доказать, что необходимые и достаточные условия разрешимости (15) выражаются конечным числом условий вида

$$Y_i^{**}(y)=0, \tag{26}$$

где Y_i^{**} — определенные линейные функционалы, не зависящие от y.

Докажем теперь, что условия (26) являются следствием условий (17). В самом деле, пусть z — произвольный элемент $\in R$. Тогда уравнение $K(x)=K(z)$ разрешимо, так как одним из его решений является $x=z$. Следовательно, в силу необходимости (26), имеем:

$$Y_i^{**}[K(z)]=0, \tag{27}$$

откуда

$$\overline{K}(Y_i^{**})=0, \tag{28}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается необходимость и достаточность условий (18) для разрешимости уравнения (16).

Доказательство теоремы III получается путем подсчета чисел линейно независимых решений регулярных уравнений $K_1 K(x)=0$ и $\overline{K}\,\overline{K}_1(x)=0$.

Поступило
18 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 1, в. 2 (12) (1946). [2] З. И. Халилов, Доклады АзССР, 3 (1947). [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, 7, № 3 (1943). [4] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [5] S. Banach, Théorie des opérations linéaires Warszawa, 1932. [6] J. Schauder, Stud. Math., 2 (1930). [7] F. Noether, Maht., Ann., 82 (1921).

---

* Функционалы Y_i^* существуют (см. ([5])).