Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

МАТЕМАТИКА

М. Ф. ТИМАН

ОБ АБЕЛЕВОЙ СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1948)

В этой работе устанавливается одна теорема о двойных степенных рядах, отдельными частными случаями которой являются результаты работ ([1], [2]). В частности, из нее будет следовать, что в ([2]) условия теоремы не являются существенными и могут быть значительно ослаблены.

Пусть двойной числовой ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{m,n}$ суммируем методом (C, α, β) $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$ к числу S, т. е. пусть

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S, \tag{1}$$

где

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = \frac{S_{m,n}^{\alpha,\beta}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}}, \tag{2}$$

а $S_{m,n}^{\alpha,\beta}$ и A_m^{α} определяются из формальных соотношений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha} x^m = (1-x)^{-\alpha-1}, \quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n = \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_{m,n} x^m y^n}{(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}}. \tag{3}$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если, кроме* (1), *ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{m,n}$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} &\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = o(m^{\beta+1}) \text{ при } m\to\infty \text{ для любого фиксированного } n;\\ &\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = o(n^{\alpha+1}) \text{ при } n\to\infty \text{ для любого фиксированного } m, \end{aligned} \tag{4}$$

то двойной степенной ряд

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{m,n} x^m y^n \tag{5}$$

для $|x| < 1$, $|y| < 1$ *абсолютно сходится и*

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to 1} f(x, y) = S, \tag{6}$$

где $(x, y)_\lambda \to 1$ известное обозначение того, что при $x, y \to 1$ выполняется условие

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1-x}{1-y} \leqslant \lambda \qquad (\lambda \geqslant 1). \tag{7}$$

При этом ни в одном из условий (4) о не может быть заменено на О.

Доказательство. Из условий (1) и (4) следует существование такой константы K, что $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} < K A_m^{\beta+1} A_n^{\alpha+1}$. Поэтому из соотношения $U_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} A_{m-i}^{-\alpha-2} A_{n-j}^{-\beta-2} S_{ij}$ и (2), в силу известных свойств чисел A_m^α (3), находим, что

$$|U_{m,n}| \leqslant K_1 \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |A_{m-i}^{-\alpha-2} A_{n-j}^{-\beta-2} A_i^{\alpha+\beta+1} A_j^{\alpha+\beta+1}|. \tag{8}$$

Но так как $\sum_{i=0}^{m} |A_{m-i}^{-\alpha-2} A_i^{\alpha+\beta+1}| \leqslant K_2 A_m^{\alpha+\beta+1}$, если $\alpha + \beta > -1$, и $\sum_{=0}^{m} |A_{m-i}^{-\alpha-2} A_i^{\alpha+\beta+1}| \leqslant K_3$, если $\alpha + \beta \leqslant -1$, то из (8) следует, что в первом случае $|U_{m,n}| \leqslant M A_m^{\alpha+\beta+1} A_n^{\alpha+\beta+1}$, а во втором случае $|U_{m,n}| \leqslant M_1$. А отсюда следует, что в обоих случаях при $|x| < 1$, $|y| < 1$ ряд (5) абсолютно сходится.

В силу этого

$$f(x, y) - S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{m,n} x^m y^n - S =$$

$$= (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S) x^m y^n. \tag{9}$$

Согласно (1), каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое натуральное число N, что для всех $m > N$, $n > N$ $|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S| < \varepsilon/4$. Имея это в виду, из равенства (9) получим

$$|f(x, y) - S| \leqslant (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \left| \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} A_m^\alpha A_n^\beta (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S) x^m y^n \right| +$$

$$+ (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \left| \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S) x^m y^n \right| +$$

$$+ (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} A_m^\alpha A_n^\beta (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S) x^m y^n \right| +$$

$$+ (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - S) x^m y^n \right|. \tag{10}$$

Очевидно, что четвертое слагаемое в правой части (10) остается меньше $\varepsilon/4$, а первое слагаемое может быть сделано меньше $\varepsilon/4$

при $x \to 1$ и $y \to 1$. В силу (7) и второго из условий (4) для $0 \leqslant m \leqslant N$

$$(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}\left|\sum_{n=N_1+1}^{\infty} A_m^{\alpha} A_n^{\beta}(\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}-S)x^m y^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant o(1)(1-y)^{\alpha+\beta+2}\sum_{n=N_1+1}^{\infty} A_n^{\alpha+\beta+1}y^n + A_m^{\alpha}\,|\,S\,|\,(1-x)^{\alpha+1}. \qquad (11)$$

При соответствующем выборе $N_1 > N$ и $x \to 1$ правая часть (11) будет меньше $\varepsilon/8N$; кроме того, для y, достаточно близких к единице,

$$\lambda^{\alpha+1}(1-y)^{\alpha+\beta+2}\left|\sum_{\alpha=N+1}^{N_1} A_m^{\alpha} A_n^{\beta}(\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}-S)x^m y^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8N}.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (10) будет меньше $\varepsilon/4$. На этом же основании при соответствующих x, y

$$(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}\left|\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} A_m^{\alpha} A_n^{\beta}(\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}-S)x^m y^n\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, $|f(x,y)-S| < \varepsilon$ для достаточно близких к единице x и y, удовлетворяющих условию (7), т. е. имеет место (6).

Остается показать, что теорема теряет силу, если в условиях (4) o заменить на O. Для этого достаточно взять ряд, у которого $U_{m,n} = A_m^{-\alpha-2} A_n^{\alpha}$. Из соотношения

$$S_{m,n}^{\alpha,\beta} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha} A_{n-j}^{\beta} U_{ij} \qquad (12)$$

находим, что $S_{m,n}^{\alpha,\beta} = A_n^{\alpha+\beta+1}$ при $m=0$ и $S_{m,n}^{\alpha,\beta}=0$, когда $m>0$. Поэтому $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = A_n^{\alpha+\beta+1}/A_n^{\beta}$ при $m=0$ и $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=0$, когда $m>0$.

Очевидно, что $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(n^{\alpha+1})$ при любом фиксированном m и $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(m^{\beta+1})$ при любом фиксированном n.

Кроме того, $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=0$, однако

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{m,n}x^m y^n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m^{-\alpha-2}A_n^{\alpha}x^m y^n = \left(\frac{1-x}{1-y}\right)^{\alpha+1},$$

и $f(x,y)$ при $(x,y)_{\lambda} \to 1$ не стремится ни к какому пределу.

Следующий пример показывает, что при выполнении условий (1) и (4) теорема может не иметь места при произвольном стремлении x и y к 1. Пусть $U_{m,n} = A_m^{-\alpha-2}A_n^{\alpha-1} + A_m^{\beta-1}A_n^{-\beta-2}$. Тогда, согласно (12), $S_{m,n}^{\alpha,\beta}=0$ при $m>0$, $n>0$; $S_{m,n}^{\alpha,\beta} = A_n^{\alpha+\beta}$, когда $m=0$; $S_{m,n}^{\alpha,\beta} = A_m^{\alpha+\beta}$, когда $n=0$. Легко убедиться в выполнении условий (1), (4); вместе с тем:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m^{-\alpha-2}A_n^{\alpha-1}x^m y^n + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m^{\beta-1}A_n^{-\beta-2}x^m y^n =$$

$$=(1-x)\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^{\alpha} + (1-y)\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^{\beta},$$

и при произвольном стремлении x, y к единице, когда $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $f(x,y)$ предела не имеет.

Соответствующий пример при $\alpha=\beta=0$ имеется в ([1]).

При $\alpha=\beta=1$ в ([2]) устанавливается, что из условий

$$1)\ \sigma^{1,1}_{m,n} \underset{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}{\longrightarrow} S;\quad 2)\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \frac{|S_{m,n}|}{m+1}<A_n;\quad 3)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{|S_{m,n}|}{n+1}<B_m$$

следует (6). Очевидно, что из этих условий всегда следует выполнение условий (1) и (4) ($\alpha=\beta=1$). Приводимый ниже пример показывает, что из условий (1) и (4) не вытекают условия 1), 2), 3).

Пусть $U_{m,n}=0$, когда $m>2$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $U_{1n}=-2U_{0n}$, $U_{2n}=U_{0n}$

$$U_{0n}=\begin{cases} 0 & n\neq 2^i-1,\quad n\neq 2^i,\quad n=0,\\ (n+1)^2 & n=2^i-1,\\ -n^2 & n=2^i,\qquad\quad i=0,\ 1,\ 2, \ldots \end{cases}$$

Легко видеть, что $S_{m,n}=0$, когда $m>1$, и $S_{1n}=-S_{0n}$, а

$$S_{0,n}=\begin{cases} 0 & n\neq 2^i-1,\qquad n=0,\\ (n+1)^2 & n=2^i-1,\qquad i=0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

откуда следует, что $\sigma^{1,1}_{m,n} \underset{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}{\longrightarrow} 0$. Кроме того,

$$|f(x,y)|=\left|\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U_{m,n}x^m y^n\right|=(1-x)^2\left|\sum_{n=0}^{\infty}U_{0n}y^n\right|=$$

$$=4y(1-x)^2(1-y)(1+4y^2+4^2y^6+4^3y^{14}+\ldots)\leqslant 4y(1-x)^2\,\frac{1}{1-y}\,.$$

Поэтому $f(x,y) \underset{(x,y)_\lambda\to 1}{\longrightarrow} 1$. Однако очевидно, что условие 3) не выполняется, в то время как имеют место условия (4).

Имеет место также следующая теорема:

Теорема 2. *Если кроме* (1) *ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_{m,n}$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} &\sigma^{\alpha,\beta}_{m,n}=o(m^{\alpha+1}) \text{ при } m\to\infty \text{ для любого фиксированного } n;\\ &\sigma^{\alpha,\beta}_{m,n}=o(n^{\beta+1}) \text{ при } n\to\infty \text{ для любого фиксированного } m, \end{aligned}\qquad (4')$$

то двойной степенной ряд (5) *для* $|x|<1$, $|y|<1$ *абсолютно сходится и*

$$\lim_{(x,y)^{\alpha,\beta}_{\lambda}\to 1} f(x,y)=S,$$

где $(x,y)^{\alpha,\beta}_{\lambda}\to 1$ *обозначает, что при* $x, y\to 1$ *выполняется условие*

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{(1-x)^{\alpha+1}}{(1-y)^{\beta+1}}\leqslant\lambda\qquad(\lambda\geqslant 1).\qquad (7')$$

При этом ни в одном из условий (4') *o не может быть заменено на O.*

Днепропетровский государственный университет

Поступило 8 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Челидзе, ДАН, **53**, № 8 (1946). [2] И. И. Огиевецкий, ДАН, **58**, № 9 (1947). [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939.