Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. Г. МЕЙЗЛЕР, О. С. ПАРАСЮК и Е. Л. РВАЧЕВА

МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1948*)

Настоящая заметка представляет собой обобщение одного результата Б. В. Гнеденко (1) на многомерный случай.

Пусть дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s-мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_s^{(n)}),$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения.

Обозначим $P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ вероятность того, что $\xi_k^{(n)} = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$. Будем считать, что моменты первого и второго порядка $a_k = M\xi_k^{(n)}$, $b_{ij} = M(\xi_i^{(n)}\xi_j^{(n)})$ конечны, а детерминант $\Delta = | b_{ij} |$ отличен от нуля.

Пусть, далее,

$$\zeta^{(n)} = (\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_s^{(n)}) = \sum_{m=1}^{n} \xi^{(m)} = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_1^{(m)}, \sum_{m=1}^{n} \xi_2^{(m)}, \ldots, \sum_{m=1}^{n} \xi_s^{(m)} \right)$$

Обозначим через $P_n(z) = P_n(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ вероятность того, что компоненты векторной суммы $\zeta^{(n)}$ примут значения $\zeta_k^{(n)} = z_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Известно, что при некоторых довольно общих условиях вероятности $P_n(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ допускают асимптотическое представление вида

$$P_n(z) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{s/2}\Delta^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad (*)$$

где a обозначает вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, а

$$Q = \sum_{i, j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j$$

есть квадратичная форма с коэффициентами

$$B_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta,$$

образующими матрицу, обратную к матрице $\| b_{ij} \|$. Нашей задачей является указать необходимые и достаточные условия для существования указанного асимптотического представления. Более точно, мы доказываем следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы разности*

$$n^{\frac{s}{2}} P(z) - \frac{1}{(2\pi)^{s/2}\Delta^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)}$$

для всех векторов z с целочисленными координатами стремились равномерно (относительно z) к нулю, необходимо и достаточно условие:

(S) *Общий наибольший делитель объемов s-мерных симплексов, все $s+1$ вершин которых лежат в целочисленных точках x, для которых $P(x)>0$, равен $\frac{1}{s!}$.*

Естественно, что в условии (S) имеются в виду невырожденные s-мерные симплексы. Условие $|\Delta| \neq 0$ гарантирует их существование.

Условие (S) равносильно следующему:

(S') *Параллелепипедальная решетка, порождаемая всеми векторами $x=x'-x''$, для которых $P(x')>0$, $P(x'')>0$, совпадает с решеткой всех целочисленных точек s-мерного пространства.*

Легко видеть, что при нарушении условия (S') асимптотическое представление ($*$) не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, которая требуется в нашей теореме, но и вообще является совершенно непригодным для представления вероятностей $P_n(z)$.

Общий случай, впрочем, легко сводится к случаю, подчиненному нашей теореме: если условие (S') не выполнено в данной системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, то от нее всегда можно перейти к новой системе координат, в которой все точки x с $P(x)>0$ останутся целочисленными, а условие (S) уже будет выполняться.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

Львовский отдел
Института математики
Академии Наук УССР

Поступило
I IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, Усп. матем. наук, в. 1 (1948).