Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ГОЛЬФАНД

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ МЕЖДУ РАСШИРЕНИЯМИ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 9 IV 1948)

Группа G называется расширением группы A при помощи группы B, если она содержит нормальный делитель N, изоморфный группе A, а фактор-группа G/N изоморфна группе B. Теория расширений групп O. Schreier'а [1,2] дает способ построения всех расширений группы A при помощи группы B. Однако решение Schreier'а не совсем удовлетворительно с точки зрения абстрактной теории групп, ибо некоторые из построенных им расширений оказываются изоморфными. Поэтому возникает дальнейшая проблема теории расширений — проблема изоморфизма.

В настоящей заметке дается решение этой проблемы для одного частного, но практически наиболее важного случая.

Введем обозначения: Φ_H — группа автоморфизмов группы H; $\zeta(a)$ — внутренний автоморфизм, произведенный элементом a.

Образ элемента $a \in H$ при автоморфизме $\varphi \in \Phi_H$ будем записывать в виде степени a^φ.

Две функции $m(\alpha, \beta) \in A$, $\mu(\alpha) \in \Phi_A$ $(\alpha, \beta \in B)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m(\alpha, \beta\gamma)\, m(\beta, \gamma) &= m(\alpha\beta, \gamma)\, \{m(\alpha, \beta)\}^{\mu(\gamma)}, \\ \mu(\alpha)\,\mu(\beta) &= \mu(\alpha\beta)\,\zeta(m(\alpha, \beta)), \\ m(\varepsilon, \varepsilon) &= e \qquad (\varepsilon = 1_B,\ e = 1_A), \end{aligned}\right\}$$

будем называть **з а ц е п л е н и е м**. Множество всех зацеплений обозначим через $\mathfrak{M}$. Сами зацепления будем коротко обозначать (m, μ), (n, ν), . . .

Элементами группы G будут пары (α, a) $(\alpha \in B,\ a \in A)$, для которых умножение определено формулой

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, m(\alpha, \beta)\, a^{\mu(\beta)} b).$$

Основная теорема Schreier'а состоит в том, что при различных зацеплениях $(m, \mu) \in \mathfrak{M}$ мы получаем этим способом все расширения группы A при помощи группы B. Как видно из построения, группа G определяется только зацеплением (m, μ). Проблема изоморфизма расширений состоит в том, чтобы разбить множество зацеплений $\mathfrak{M}$ на классы так, чтобы каждый класс объединял в себе все зацепления, дающие изоморфные расширения, и только их. Однако мы несколько сузим задачу. Заметим, что в группе G, вообще говоря, может быть несколько нормальных делителей, изоморфных группе A. Но среди них выделяется нормальный делитель A_0, состоящий из пар (ε, a) $(a \in A)$.

Пусть G и H — два расширения группы A при помощи группы B. Изоморфизм $G^{\theta} = H$ будем называть изоморфизмом первого рода, если он переводит A_0 в себя (A_0 будет подгруппой всех расширений, построенных описанным выше способом).

Основная теорема устанавливает необходимое и достаточное условие существования между двумя расширениями изоморфизма 1-го рода, выраженное в терминах зацеплений.

Прежде чем ее сформулировать, проведем следующую конструкцию: через Ω обозначим множество всех трехэлементных „матриц“

$$\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in \Phi_B$, $\psi \in \Phi_A$, а $u(\alpha) \in A$ $(\alpha \in B)$ — функция, подчиненная единственному условию: $u(\varepsilon) = e$.

Ω становится группой, если следующим образом определить умножение „матриц“

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & u_1(\alpha) \\ & \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 & u_2(\alpha) \\ & \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_2 & u_2(\alpha^{\varphi_1})\, u_1^{\psi_2}(\alpha) \\ & \psi_1\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Определим умножение „матрицы“ из Ω на пару (α, a) и на зацепление (m, μ) формулами:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha, a)\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix} = (\alpha^{\varphi},\ u(\alpha)\, a^{\psi}), \\ &(n, \nu)\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix} = (m, \mu), \\ &\qquad m(\alpha, \beta) = \{u(\alpha\beta)^{-1} n(\alpha^{\varphi}, \beta^{\varphi})\, [u(\alpha)]^{\nu(\beta^{\varphi})} u(\beta)\}^{\psi^{-1}}, \\ &\qquad \mu(\alpha) \quad = \{\nu(\alpha^{\varphi})\}^{\zeta(\psi^{-1})} \zeta(u^{\psi^{-1}}(\alpha)). \end{aligned}\right\}$$

Преобразования множества $\mathfrak{M}$:

$$(n, \nu) \to (n, \nu)\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix}$$

образуют группу Σ, вообще говоря, не транзитивную. Системы транзитивности этой группы будем называть классами зацеплений.

Теорема 1. *Между двумя расширениями G и H группы A при помощи группы B тогда и только тогда существует изоморфизм первого рода, когда соответствующие им зацепления принадлежат к одному классу. Всякий изоморфизм первого рода осуществляется при помощи некоторой „матрицы“ из Ω путем соответствия:*

$$(\alpha, a) \to (\alpha, a)\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм первого рода расширения G на себя будем называть автоморфизмом первого рода.

Автоморфизмы первого рода образуют группу, которая тогда и только тогда совпадает с Φ_G, когда A_0 — характеристическая подгруппа группы G.

Теорема 2. *Если G — расширение группы A при помощи группы B, определенное зацеплением $(m, \mu) \in \mathfrak{M}$, то группа автоморфиз-*

мов первого рода группы G изоморфна подгруппе группы Ω, состоящей из матриц, для которых

$$(m, \mu)\begin{pmatrix} \varphi & u(\alpha) \\ & \psi \end{pmatrix} = (m, \mu).$$

Общая проблема изоморфизма может быть решена аналогичными методами. Однако получающиеся здесь результаты уже не выражаются столь просто. Мы ограничимся лишь одной теоремой.

Теорема 3. *Если в группе A не существует нормального делителя, фактор-группа по которому изоморфна нормальному делителю группы B, то между любыми двумя расширениями группы A при помощи группы B возможен изоморфизм только первого рода.*

Действительно, если между расширениями G и H существует изоморфизм θ, причем $A_0^\theta \neq A_0$ (в группе H), то

$$A_0^\theta A_0/A_0 \cong A_0^\theta/A_0^\theta \cap A_0.$$

Но левая часть изоморфна нормальному делителю группы B, а правая часть изоморфна фактор-группе группы A.

Поступило
7 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Schreier, Monatsh. Math. Phys., 34 (1926). [2] А. Г. Курош, Теория групп, 1944.