Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 7

МАТЕМАТИКА

Л. Л. ВЕРБИЦКИЙ

МЕТРИКО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1948)

Гиперповерхности второго порядка (гиперквадрики) могут быть охарактеризованы своими метрико-дифференциальными свойствами. Тензорный признак гиперквадрик, приведенный ниже, непосредственно связан с этими свойствами.

Пусть

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta, \qquad \bar{n}d^2\bar{r} = \pi_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

две гауссовы фундаментальные формы гиперповерхности v_{n-1} в n-мерном евклидовом пространстве E_n. При проективном преобразовании E_n тензор

$$\vartheta_{ijk} = \pi_{ij\,|\,k} - \frac{K_i\pi_{jk} + K_j\pi_{ki} + K_k\pi_{ij}}{(n+1)K}, \text{ где } K = \frac{\operatorname{Det}\|\pi_{ij}\|}{\operatorname{Det}\|g_{ij}\|},$$

получает скалярный множитель, зависящий от точки и от параметров преобразования. Обращаясь в нуль на гипосфере, тензор ϑ_{ijk} вместе с тем тождественно равен нулю на всякой невырождающейся гиперквадрике.

Обратное предложение (гиперповерхность, удовлетворяющая условию $\vartheta_{ijk} = 0$, есть гиперквадрика) получим, выбирая линии кривизны гиперповерхности за параметрические и интегрируя в этой системе координат уравнения Кодацци — Гаусса совместно с условием $\vartheta_{ijk} = 0$, что приводит к следующей (характерной для гиперквадрики) форме линейного элемента

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{du_i^2}{4u_i^3 P(u_i)} \prod_{\lambda \neq i} \frac{u_\lambda - u_i}{u_\lambda},$$

где $P(u_i)$ — полином относительно u_i степени n со старшим коэффициентом $(-1)^{n-1}$.

Существование системы координат, в которой линии кривизны являются параметрическими (т. е. нормальность гиперповерхности), вытекает из условия $\vartheta_{ijk} = 0$. Действительно, дифференцируя ковариантно уравнение

$$\operatorname{Det}\|\pi^i_j - \sigma\delta^i_j\| = 0 \qquad (\pi^i_j = g^{i\alpha}\pi_{\alpha j}),$$

которому удовлетворяют главные кривизны, и замечая, что равенство $\vartheta_{ijk} = 0$ эквивалентно

$$\pi^i_{j\,|\,k} = \frac{1}{(n+1)K}\left(K^i\pi_{jk} + K_j\pi^i_k + K_k\pi^i_j\right),$$

после некоторых преобразований получим

$$\pi^\lambda_i\varphi_\lambda = \sigma\varphi_i\,, \text{ где } \varphi = \ln\frac{\sigma^{n+1}}{K}\,, \quad \varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial n^i}.$$

Отсюда следует, что линии кривизны гиперквадрики допускают ортогональные $(n-2)$-мерные поверхности, и эти последние суть поверхности уровня функций

$$\psi = \frac{\sigma^{n+1}}{K}\,,$$

где σ — соответствующая главная кривизна и K равно произведению главных кривизн. Обратно, гиперповерхность, обладающая указанным свойством, удовлетворяет условию $\vartheta_{ijk} = 0$ и, следовательно, является гиперквадрикой.

В тесной связи с предыдущим находится предложение:

Вдоль линии кривизны гиперповерхности второго порядка соответствующая главная кривизна пропорциональна кубу каждой из остальных главных кривизн, а эти последние друг другу пропорциональны. Обратно, нормальная гиперповерхность, обладающая этим свойством, есть гиперквадрика.

Поступило
1 IV 1948