Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Академик В. П. НИКИТИН, В. К. ТУРКИН и Н. П. КУНИЦКИЙ

О ПОСТРОЕНИИ ДИАГРАММЫ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ

В ряде наших работ ([1-3]) мы рассматривали вопрос о построении диаграмм устойчивости, иллюстрирующих зависимость быстроты, с которой рассматриваемая система стремится к некоторому стационарному состоянию, от различных коэффициентов, содержащихся в дифференциальных уравнениях, описывающих работу этой системы. В настоящей статье мы рассматриваем вопрос о построении диаграмм частоты колебания, иллюстрирующих зависимость от вышеупомянутых коэффициентов величины, которую можно принять за круговую частоту колебаний, испытываемых системой при стремлении к стационарному состоянию.

Как известно, Ляпунов ([4]) называет характеристическим числом функции $f(t)$ действительного переменного t такое действительное число λ_0, что при $t\to\infty$ функция $e^{\lambda t}f(t)$ стремится к пределу 0, если $\lambda<\lambda_0$, и является неограниченной, если $\lambda>\lambda_0$.

Пусть

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_1}{dt} &= f_1(t, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),\\
\frac{d\omega_2}{dt} &= f_2(t, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d\omega_n}{dt} &= f_n(t, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)
\end{aligned} \tag{1}$$

есть система дифференциальных уравнений, описывающая процесс изменения переменных

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \tag{2}$$

значения которых определяют состояние рассматриваемой нами системы.

Пусть

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \overset{*}{\omega}_1,\\
\omega_2 &= \overset{*}{\omega}_2,\\
&\cdots\\
\omega_n &= \overset{*}{\omega}_n,
\end{aligned} \tag{3}$$

($\overset{*}{\omega}_1, \overset{*}{\omega}_2, \ldots, \overset{*}{\omega}_n$ — некоторые функции времени или постоянные) есть некоторый интересующий нас процесс изменения состояния этой системы, определяемый значениями (3) переменных (2). Пусть уравнения возмущенного процесса имеют вид:

$$\frac{d(\omega_1-\omega_1^*)}{dt}=\varphi_1(t,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}(\omega_i-\omega_i^*)+F_1,$$

$$\frac{d(\omega_2-\omega_2^*)}{dt}=\varphi_2(t,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}(\omega_i-\omega_i^*)+F_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d(\omega_n-\omega_n^*)}{dt}=\varphi_n(t,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}(\omega_i-\omega_i^*)+F_n,$$

где $F_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ — совокупность членов степени выше первой в разложении $\varphi_i(t,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ в ряд по степеням величин

$$\omega_1-\omega_2^*,\ \omega_2-\omega_2^*,\ldots,\ \omega_n-\omega_n^*.$$

Предположим, что система (1) правильная ([4]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{1i}-\delta_{1i}q)z_i,\\ \frac{dz_2}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{2i}-\delta_{2i}q)z_i,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dz_n}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ni}-\delta_{ni}q)z_i,\end{aligned}\tag{4}$$

где q — некоторая постоянная, а $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$.

Пусть

$$\begin{aligned}Z^{(1)}&=z_1^{(1)},\ z_2^{(1)},\ldots,z_n^{(1)},\\ Z^{(2)}&=z_1^{(2)},\ z_2^{(2)},\ldots,z_n^{(2)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Z^{(n)}&=z_1^{(n)},\ z_2^{(n)},\ldots,z_n^{(n)},\end{aligned}\tag{5}$$

— n линейно независимых решений системы (4). Как известно ([4]), характеристическим числом решения $Z^{(i)}\ (i=1,2,\ldots,n)$ называется наименьшее из характеристических чисел функций $z_1^{(i)},\ z_2^{(i)},\ldots,z_n^{(i)}$; обозначим это число через $\lambda_{0i}(q)$. Диаграмма, иллюстрирующая зависимость при различных значениях q наименьшего из чисел $\lambda_{0i}(q)$ от коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения (1), есть диаграмма устойчивости процесса изменения (3) рассматриваемой системы.

Аналогично диаграммой частоты колебания мы назовем диаграмму, иллюстрирующую зависимость при различных значениях q от коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения (1), наименьшего из характеристических чисел функций $y_{\lambda\mu}(t)$, получаемых из функций, входящих в решения (5), по формуле:

$$y_{\lambda\mu}(t)=z_\lambda^{(\mu)}(-it).$$

Предположим, что правые части дифференциальных уравнений (1) не зависят явно от времени; тогда определение характеристических чисел функций $z_\lambda^{(\mu)}(t)$ сводится к решению алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-q-s & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-q-s & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-q-s \end{vmatrix} = 0,$$

а определение характеристических чисел функций $y_{\lambda\mu}(t)$ — к решению алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} i\alpha_{11}-q-s & i\alpha_{12} & \ldots & i\alpha_{1n} \\ i\alpha_{21} & i\alpha_{22}-q-s & \ldots & i\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i\alpha_{n1} & i\alpha_{n2} & \ldots & i\alpha_{nn}-q-s \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) может быть переписано в виде

$$s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1} s + c_n = 0, \tag{7}$$

где коэффициенты c_k являются, вообще говоря, комплексными числами; пусть $c_k = a_k + ib_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

В работе Франка ([5]) выведена новая форма необходимых и достаточных условий отрицательности действительных частей всех корней алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами. Для уравнения (7) эти условия принимают следующий вид;

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k+1} & -b_2 & -b_4 & \ldots & -b_{2k} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k} & -b_1 & -b_3 & \ldots & -b_{2k-1} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-1} & 0 & -b_2 & \ldots & -b_{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k+1} & 0 & 0 & \ldots & -b_k \\ 0 & b_2 & b_4 & \ldots & b_{2k} & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-1} \\ 0 & b_1 & b_3 & \ldots & b_{2k-1} & 1 & a_2 & \ldots & a_{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{k+1} & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{vmatrix} > 0 \tag{8}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ a_r = b_r = 0$ при $r > n)$.

Та область значений коэффициентов уравнения (7), в пределах которой удовлетворяются условия (8), является областью, в пределах которой наименьшее из характеристических чисел функций $y_{\lambda\mu}(t)$ не меньше, чем q, а следовательно, и круговую частоту переходного процесса, имеющего место при стремлении рассматриваемой системы к процессу или состоянию (3), следует считать имеющей значение не меньшее, чем q.

В качестве примера рассмотрим установившуюся систему четвертого порядка; для нее уравнение (7) имеет вид

$$(s+q)^4 + iA_1(s+q)^3 + A_2(s+q)^2 + iA_3(s+q) + A_4 = 0, \tag{9}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — действительные числа. Посредством преобразования

$$s = u - \frac{iA_1}{4}$$

уравнение (9) приводится к виду

$$(u+q)^4+B_2(u+q)^2+iB_3(u+q)+B_4=0, \tag{10}$$

где B_2, B_3, B_4 — действительные числа. Пусть $B_2>0$. Посредством преобразования

$$u=v\sqrt{B_2}$$

уравнение (10) приводится к виду

$$(v+q')^4+(v+q')^2+ix(v+q')+y=0, \tag{11}$$

где x, y — действительные числа и

$$q'=q/\sqrt{B_2}.$$

Для уравнения (11) условия (8) имеют следующий вид:

1) $a_1>0$,

2) $a_1a_2-a_3>0$,

3) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & -b_4 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 & -b_3 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & b_3 & 1 & a_2 \end{vmatrix}>0,$$

4) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & -b_4 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & -b_4 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 & 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}>0.$$

Здесь $a_1=4q'$, $a_2=6q'^2+1$, $a_3=4q'^3+2q'$, $a_4=q'^4+q'^2+y$, $b_3=x$, $b_4=q'x$.

Несмотря на высокий порядок написанных выше определителей, они могут быть вычислены легко благодаря большому числу нулей.

Поступило
6 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, Электричество, № 4 (1946). [2] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, Изв. АН СССР, ОТН, № 11 (1946). [3] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 58, № 4 (1947). [4] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 2 изд., 1935. [5] E. Frank, Bull. Amer. Math. Soc., 52, No. 2 (1946).