Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u''+(a_0+a_1\cos 2x+a_2\cos 4x)\,u=0$

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 5 XI 1947)

Интегральные уравнения для периодических решений уравнения

$$u''+(a_0+a_1\cos 2x+a_2\cos 4x)\,u=0, \tag{1}$$

где a_1 и a_2 — произвольные заданные величины, a_0 — постоянная, определяемая из условия существования периодического (с периодом 2π) интеграла, были установлены автором в работе (1). Интегральные уравнения, которые выводятся в настоящей работе, имеют своей предельной формой стандартные интегральные уравнения для функций Матье (2) и могут быть рассматриваемы как естественное обобщение этих последних.

Метод вывода искомых интегральных уравнений совпадает с методом, использованным в работе (1). В качестве ядра интегрального уравнения $K(x, s)$ выбирается подходящее частное решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+(a_1\cos 2x+a_2\cos 4x)\,K=\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}+(a_1\cos 2s+a_2\cos 4s)\,K. \tag{2}$$

В отличие от работы (1), это решение ищется в форме

$$K=e^{\sqrt{a_2/2}\,(\cos 2x+\cos 2s)}\psi(x)\psi(s)F(\sigma),\qquad \sigma=\varphi(x)\varphi(s), \tag{3}$$

φ, ψ, F — функции, подлежащие определению.

Уравнение (4) удовлетворится тождественно, если принять

$$\left.\begin{array}{llll} 1)\ \psi(x)=1, & \varphi(x)=\cos x; & 3)\ \psi(x)=\sin x, & \varphi(x)=\cos x; \\ 2)\ \psi(x)=1, & \varphi(x)=\sin x; & 4)\ \psi(x)=\cos x, & \varphi(x)=\sin x \end{array}\right\} \tag{4}$$

и определить $F(\sigma)$ соответственно из уравнений:

$$\begin{aligned} &1)\ F''+4\sqrt{2a_2}\,\sigma F'-(2a_1-4\sqrt{2a_2})\,F=0;\\ &2)\ F''-4\sqrt{2a_2}\,\sigma F'+(2a_1-4\sqrt{2a_2})\,F=0;\\ &3)\ F''+4\sqrt{2a_2}\,\sigma F'-(2a_1-8\sqrt{2a_2})\,F=0;\\ &4)\ F''-4\sqrt{2a_2}\,\sigma F'+(2a_1-8\sqrt{2a_2})\,F=0. \end{aligned} \tag{5}$$

При помощи замены переменной

$$z=\pm\sqrt{8a_2}\,\sigma^2, \tag{6}$$

где знак $+$ относится к случаям 2, 4, знак — к случаям 1, 3, эти уравнения могут быть приведены к специальному случаю уравнения для вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$, именно к уравнению

$$z\frac{d^2F}{dz^2}+\left(\frac{1}{2}-z\right)\frac{dF}{dz}-\alpha F=0, \tag{7}$$

где $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}}$ для случаев 1, 2 и $\alpha=1-\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}}$ для случаев 3, 4.

Общий интеграл уравнения (7) имеет вид:

$$F=A_1\,{}_1F_1(\alpha,\ {}^1\!/_2,\ z)+A_2\,{}_1F_1({}^1\!/_2+\alpha,\ {}^3\!/_2,\ z)\,z^{1/2}, \tag{8}$$

где ${}_1F_1(\alpha,\gamma,z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots$

Выбирая различным образом постоянные A_1 и A_2, получаем восемь различных решений уравнения (2). В каждом из этих решений можно заменить $\sqrt{a_2}$ на $-\sqrt{a_2}$, так как эта подстановка не изменяет вида исходного уравнения. Таким образом, получаем следующие решения:

$$K_1(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{1}{2},\ \mp\sqrt{8a_2}\cos^2x\cos^2s\right),$$

$$K_2(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\cos x\cos s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(1\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{3}{2},\ \mp\sqrt{8a_2}\cos^2x\cos^2s\right),$$

$$K_3(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{1}{2},\ \pm\sqrt{8a_2}\sin^2x\sin^2s\right),$$

$$K_4(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\sin x\sin s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(1\mp\frac{a_1}{4\sqrt{a_2}},\ \frac{3}{2},\ \pm\sqrt{8a_2}\sin^2x\sin^2s\right),$$

$$K_5(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\sin x\sin s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(1\mp\frac{a_1}{4\sqrt{a_2}},\ \frac{1}{2},\ \mp\sqrt{8a_2}\cos^2x\cos^2s\right), \tag{9}$$

$$K_6(x,s)=\frac{1}{4}\,e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\sin 2x\sin 2s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(\frac{3}{2}\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{3}{2},\ \mp\sqrt{8a_2}\cos^2x\cos^2s\right),$$

$$K_7(x,s)=e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\cos x\cos s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(1\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{1}{2},\ \pm\sqrt{8a_2}\sin^2x\sin^2s\right),$$

$$K_8(x,s)=\frac{1}{4}\,e^{\pm\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\cos 2x+\cos 2s)}\sin 2x\sin 2s\,\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(\frac{3}{2}\mp\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}},\ \frac{3}{2},\ \pm\sqrt{8a_2}\sin^2x\sin^2s\right).$$

Уравнение (1) имеет (при надлежаще выбранном a_0) периодическое решение одного из четырех типов I — IV, которые могут быть охарактеризованы свойствами:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ u(-x)=u(x), && u(\pi-x)=u(x).\\
&\text{II.}\ \ u(-x)=u(x), && u(\pi-x)=-u(x).\\
&\text{III.}\ \ u(-x)=-u(x), && u(\pi-x)=u(x).\\
&\text{IV.}\ \ u(-x)=-u(x), && u(\pi-x)=-u(x).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Для этих решений справедливы интегральные уравнения вида

$$
u(x)=\lambda\int_{0}^{\pi/2} K(x,s)\,u(s)\,ds, \tag{11}
$$

где подходящие для каждого из типов I — IV ядра $K(x, s)$ указаны в табл. 1, причем положено $\sqrt{2a_1}=k_1$.

Таблица 1

Тип решения	Ядро $K(x, s)$	Предельная форма ядра $K(x, s)$ при $a_2 \to 0$	Предельная форма решения $u(x)$ при $a_2 \to 0$
I	$K_1(x, s)$	$\cos(\sqrt{\mp 1}\,k_1 \cos x \cos s)$	$\mathrm{ce}_2\left(x, -\frac{a_1}{2}\right)$
	$K_3(x, s)$	$\cos(\sqrt{\pm 1}\,k_1 \sin x \sin s)$	
II	$K_2(x, s)$	$\frac{1}{\sqrt{\mp 1}\,k_1} \sin(\sqrt{\mp 1}\,k_1 \cos x \cos s)$	$\mathrm{ce}_{2n+1}\left(x, -\frac{a_1}{2}\right)$
	$K_7(x, s)$	$\cos x \cos s \cos(\sqrt{\pm 1}\,k_1 \sin x \sin s)$	
III	$K_4(x, s)$	$\frac{1}{\sqrt{\pm 1}\,k_1} \sin(\sqrt{\pm 1}\,k_1 \sin x \sin s)$	$\mathrm{se}_{2n+1}\left(x, -\frac{a_1}{2}\right)$
	$K_5(x, s)$	$\sin x \sin s \cos(\sqrt{\mp 1}\,k_1 \cos x \cos s)$	
IV	$K_6(x, s)$	$\sin x \sin s \frac{1}{\sqrt{\mp 1}\,k_1} \sin(\sqrt{\mp 1}\,k_1 \cos x \cos s)$	$\mathrm{se}_{2n}\left(x, -\frac{a_1}{2}\right)$
	$K_8(x, s)$	$\cos x \cos s \frac{1}{\sqrt{\pm 1}\,k_1} \sin(\sqrt{\pm 1}\,k_1 \sin x \sin s)$	

Случай $a_1=0$ также приводит к функциям Матье. Предельная форма решений и соответствующих ядер для этого случая дана в табл. 2, где $\sqrt{8a_2}=k_2$ *.

Другими интересными случаями являются те, для которых ядро $K(x, s)$ оказывается вырожденным, вследствие чего интегральное уравнение допускает явное решение. Последнее будет всякий раз, когда параметр α гипергеометрической функции в уравнениях (9) оказывается равным целому отрицательному числу $\alpha=-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Так, например, для функций типа (1) этот случай осуществляется при $\frac{a_1}{4\sqrt{2a_2}}=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; вырожденной формой интегральных уравнений (11) будут уравнения

$$
\begin{aligned}
u(x)&=\lambda\int_{0}^{\pi/2} e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2(\cos 2x+\cos 2s)}\,H_{2n}(\sqrt{\mp 1}\,k_2\cos x\cos s)\,u(s)\,ds,\\
u(x)&=\lambda\int_{0}^{\pi/2} e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2(\cos\ x+\cos 2s)}\,H_{2n}(\sqrt{\pm 1}\,k_2\sin x\sin s)\,u(s)\,ds,
\end{aligned} \tag{12}
$$

где $H_n(z)$ — полином Эрмита n-го порядка $H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}$.

---

* Символ $\Phi(x)$ обозначает интеграл вероятности $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

Таблица 2

Тип решения	Ядро $K(x, s)$	Предельная форма ядра $K(x, s)$ при $a_1 \to 0$
I	$K_1(x, s)$	$e^{\mp\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}$
	$K_3(x, s)$	$e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}$
II	$K_2(x, s)$	$e^{\mp\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\mp 1}\,k_2}\Phi(\sqrt{\mp 1}\,k_2\cos x\cos s)$
	$K_7(x, s)$	$e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}\cos x\cos s\,[e^{\mp k_2^2\sin^2 x\sin^2 s}+ \sqrt{\pi}\sqrt{\pm 1}\,k_2\sin x\sin s\,\Phi(\sqrt{\pm 1}\,k_2\sin x\sin s)]$
III	$K_4(x, s)$	$e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pm 1}\,k_2}\Phi(\sqrt{\pm 1}\,k_2\sin x\sin s)$
	$K_5(x, s)$	$e^{\mp\frac{1}{4}k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}\sin x\sin s\,[e^{\pm k_2^2\cos^2 x\cos^2 s}\mp\sqrt{\pi}\sqrt{\pm 1}\,k_2\cos x\cos s\,\Phi(\sqrt{\mp 1}\,k_2\cos x\cos s)]$
IV	$K_6(x, s)$	$\dfrac{1}{4}e^{\mp k_2^2(1\pm\cos 2x\cos 2s)}\sin 2x\sin 2s$
	$K_8(x, s)$	$\dfrac{1}{4}e^{\pm k_2^2(1+\cos 2x\cos 2s)}\sin 2x\sin 2s$

Предельная форма решения $u(x)$ при $a_1 \to 0$

I. $\mathrm{ce}_{2n}\left(2x, -\dfrac{a_2}{8}\right)$. II. $\mathrm{ce}_{2n+1}\left(2x, -\dfrac{a_2}{8}\right)$.

III. $\mathrm{se}_{2n+1}\left(2x, -\dfrac{a_2}{8}\right)$. IV. $\mathrm{se}_{2n}\left(2x, -\dfrac{a_2}{8}\right)$.

Аналогичные интегральные уравнения имеют место для функций типов II — IV.

Во всех вырожденных случаях решение представляется в форме

$$u(x) = e^{\pm\frac{1}{4}k_2^2\cos 2x}\,v(x),$$

где $v(x)$ — тригонометрический полином.

Ленинградский физико-технический институт
Академии Наук СССР

Поступило
5 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лебедев, ДАН, **52**, 395 (1946). [2] E. G. Poole, Proc. London Math. Soc., **20**, 374 (1921).