Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МЕХАНИКА

В. А. ФЛОРИН

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНСОЛИДАЦИИ ЗЕМЛЯНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 12 IX 1947)

В общеизвестных работах Н. М. Герсеванова, К. Терцаги и др. рассмотрено большое число различных частных случаев одноразмерной задачи консолидации водонасыщенной земляной среды, принимая ее в виде двухфазной системы.

При рассмотрении нами плоской и пространственной задач консолидации, т. е. явлений уплотнения или разбухания во времени земляной среды, обусловленных собственным весом, приложением к ее граничной поверхности какой-либо внешней нагрузки или изменением напорного режима, принимаются следующие основные положения.

Расчетная модель земляной среды в предположении наличия в ней защемленного газа принимается в виде трехфазной системы, состоящей из твердой, жидкой и газообразной фаз. Скелет грунта, представленный весьма мелкопористой средой с коэффициентом фильтрации $k = 10^{-4} - 10^{-8}$ см/сек. (так как только в этом случае явления консолидации имеют практическое значение), может уплотняться только вследствие изменения объема пор. Сжимаемостью материала скелета грунта и собственно жидкости мы пренебрегаем. Количество защемленного в виде отдельных пузырьков в насыщенной жидкостью земляной среде газа достаточно мало и обычно не превышает 5—10—12% от объема пор. По мере увеличения газосодержания дополнительные давления в жидкости, обусловленные приложением какой-либо уплотняющей нагрузки, уменьшаются, и исследование процесса консолидации теряет свое значение. Защемленные пузырьки газа перемещаются совместно со скелетом грунта. По экспериментальным данным, при достаточно мелкопористой среде они не могут проскальзывать между твердыми частицами земляной среды. Сжимаемость и растворимость в жидкости защемленных пузырьков газа могут быть с достаточным приближением описаны законами Бойля—Мариотта и Генри. Явления фильтрации в случае отсутствия защемленных пузырьков газа и неподвижности скелета грунта могут быть описаны зависимостью Дарси. Силами инерции вследствие несущественности их влияния в условиях достаточно мелкопористой среды пренебрегаем.

Обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ „скорости фильтрации", соответственно, жидкой, твердой и газообразной фаз; через m, n и s — объемное содержание жидкой, твердой и газообразной фаз в единице объема; через t — время, ρ — плотность газа и μ — его коэффициент растворимости.

Примем, что во всех точках среды жидкость насыщена газом в соответствии с имеющимся давлением. Далее примем, что масса растворенного в объеме жидкости m газа, равная $\mu m\rho$, может изменяться только по мере изменения давления, а следовательно и плотности газа. Тогда, полагая в соответствии с принятыми допущениями плотности материала твердой и жидкой фаз постоянными, можно составить условия, что расходы массы каждой из фаз в отдельности через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем земляной среды, равны соответственным изменениям массы каждой из фаз в рассматриваемом объеме:

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{u}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t}+\mu m\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{w}=0, \tag{3}$$

откуда, учитывая, что $m+n+s=1$, получаем:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})+\frac{1}{\rho}(s+\mu m)\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{\rho}(\mathbf{w}, \operatorname{grad}\rho)=0. \tag{4}$$

Принимая в рассматриваемых условиях уравнение состояния газа в предположении изотермического режима, имеем, обозначая газовую постоянную через α:

$$\rho=\frac{1}{a}(p+p_0), \tag{5}$$

где p_0 обозначает величину атмосферного давления, а p — превышение над этим давлением*.

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})+\frac{1}{p+p_0}(s+\mu m)\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{\rho}(\mathbf{w}, \operatorname{grad}\rho)=0. \tag{6}$$

Обозначим через m', n' и s' площади сечения жидкой, твердой и газообразной фаз в единице площади земляной среды. В соответствии с принятым допущением, при $s'=0$ и неподвижном скелете фильтрация жидкости в порах скелета грунта может быть описана зависимостью Дарси:

$$\mathbf{u}=-k\operatorname{grad}H. \tag{7}$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ и $\bar{\mathbf{w}}$ действительные средние скорости движения различных фаз, связанные со „скоростями фильтрации“ зависимостями: $\mathbf{u}=m'\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}=n'\bar{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{w}=s'\bar{\mathbf{w}}$.

Тогда зависимость Дарси (7) может быть представлена в виде:

$$\bar{\mathbf{u}}=-\frac{k}{m'}\operatorname{grad}H, \tag{8}$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ может рассматриваться как относительная средняя скорость жидкости по отношению к неподвижному скелету.

---

* В первом приближении мы считаем возможным не учитывать различия величин давления газа $p_г+p_0$ в защемленном пузырьке и в окружающей его жидкости $p_ж+p_0$ и принимаем $p_г=p_ж=p$. При радиусе пузырька не менее 0,001 см разность этих давлений:

$$p_г-p_ж=\frac{2\alpha}{r}\leqslant\frac{2\cdot 77}{0{,}001\cdot 10^6}\simeq 0{,}15\,\frac{кг}{см^2}$$

достаточно мала, и пренебрежение ею вполне допустимо.

В случае движения как жидкости, так и скелета грунта (совместно с пузырьками газа) относительная средняя скорость движения жидкости в порах грунта по отношению к скелету грунта равна $\overline{\mathbf{u}}-\overline{\mathbf{v}}$, откуда аналогичная выражению (8) зависимость Дарси может быть представлена в виде:

$$\overline{\mathbf{u}}-\overline{\mathbf{v}}=-\frac{k}{m'}\operatorname{grad} H$$

или

$$\mathbf{u}-\frac{m'}{n'}\mathbf{v}=-k\operatorname{grad} H\,^{*}. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что пузырьки газа перемещаются вместе с твердой фазой, вследствие чего $\overline{\mathbf{v}}=\overline{\mathbf{w}}$, откуда $\mathbf{w}=\frac{s'}{n'}\mathbf{v}$, и учитывая зависимость (9), а также уравнение (2), можно представить уравнение (6) в виде:

$$-\frac{1}{n'}\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{s+\mu m}{p+p_0}\frac{\partial p}{\partial t}-\operatorname{div} k\operatorname{grad} H+\left(\mathbf{v},\operatorname{grad}\frac{1}{n'}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{s'}{n'}\mathbf{v},\operatorname{grad}\rho\right)=0. \tag{10}$$

Принимая, что отдельные частицы грунта малы по сравнению с рассматриваемой областью грунта и что, вследствие полной беспорядочности расположения этих частиц, каждая из поверхностных „пористостей“ m', n' и s' в любом сечении грунта одинакова, можно в соответствии с обычными соображениями теории фильтрации показать, что $m=m'$, $n=n'$ и $s=s'$. Кроме того, учитывая, что при исследованиях деформируемости скелета грунта, производящихся обычно на одометрах, деформируемость скелета характеризуется обычно зависимостью коэффициента пористости ε от напряженного состояния скелета грунта, и обозначая коэффициент водонасыщения через η, введем обозначения:

$$m=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\eta,\quad n=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad s\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1-\eta).$$

В результате уравнение (10) можно представить в виде:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\beta\frac{\partial p}{\partial t}-\operatorname{div} k\operatorname{grad} H+(\mathbf{v},\operatorname{grad}\varepsilon)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{s'}{n'}\mathbf{v},\operatorname{grad}\rho\right)=0, \tag{11}$$

где

$$\beta=\frac{s+\mu m}{p+p_0}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{1-\eta+\mu\eta}{p+p_0}. \tag{12}$$

Учитывая, что величина скорости $\mathbf{v}$ весьма мала, двумя последними членами уравнения (11) по сравнению с остальными членами уравнения можно пренебречь, в результате чего уравнение (11) может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\beta\frac{\partial p}{\partial t}-\operatorname{div} k\operatorname{grad} H=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) может рассматриваться как основное уравнение процесса консолидации при любых деформационных свойствах скелета

---

* Аналогичная зависимость для двухфазной системы была ранее получена Н. М. Герсевановым иным путем.

грунта. Входящая в него величина $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ зависит от деформационных свойств и напряженного состояния скелета грунта и подлежит особому рассмотрению.

Коэффициент β для различных давлений в жидкости подлежит определению экспериментальным путем, для чего в первом приближении разработана соответствующая лабораторная методика его определения. В случае отсутствия необходимых лабораторных исследований величина β может быть определена для различных давлений теоретически по выражению (12), в котором величины s, m, ε и η могут быть приближенно выражены через величины s_0, m_0, ε_0 и η_0.

В заключение можно отметить, что принятая расчетная модель с учетом принятых допущений может быть в конечном итоге уподоблена модели, основанной на представлении о движении несжимаемой жидкости в деформируемой среде с несжимаемым материалом скелета грунта в предположении сплошного распределения во всех точках среды источников или стоков, интенсивности которых определяются сжимаемостью и растворимостью пузырьков защемленного газа.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники
им. Б. Е. Веденеева

Поступило
12 IX 1947