Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МАТЕМАТИКА

В. В. РЫЖКОВ

К ВОПРОСУ О ПРОЕКТИВНОМ ИЗГИБАНИИ КОНГРУЕНЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 X 1947)

В настоящей заметке рассматриваются некоторые вопросы, связанные с проективным изгибанием конгруенций прямых с точечно и тангенциально невырожденными фокальными полостями. В § 1 ставится и решается вопрос об отыскании конгруенций, допускающих изгибание с функциональным произволом; § 2 посвящен некоторым случаям изгибания W-конгруенций и, в частности, изгибанию W-конгруенций с функциональным произволом.

§ 1. Относя конгруенцию $(M_1 M_2)$ к тетраэдру Вильчинского, мы запишем уравнения движения тетраэдра в виде:

$$
\begin{aligned}
&M_{1u}=\delta M_3,\\
&M_{2u}=M_4,\\
&M_{3u}=\delta\delta_1 M_1+\delta_v M_2,\\
&M_{4u}=(\Delta_{1v}-P\Delta_1)M_1+R_1M_2-\Delta_1M_3-P_1M_4,\\
&M_{1v}=M_3,\\
&M_{2v}=\delta_1 M_1,\\
&M_{3v}=RM_1+(\Delta_u-P_1\Delta)M_2-PM_3-\Delta M_4,\\
&M_{4v}=\delta_{1u}M_1+\delta\delta_1 M_2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Коэффициенты δ, δ_1, Δ, Δ_1, P, P_1, R, R_1 связаны условиями совместности системы (1). Обозначая соответствующие коэффициенты для конгруенции $(N_1 N_2)$, проективно наложимой на данную, через $\overline{\delta}$, $\overline{\delta}_1$, $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}_1$, $\overline{P}$, $\overline{P}_1$, $\overline{R}$, $\overline{R}_1$, мы сможем положить: $\overline{\delta}=a\delta$, $\delta_1=\frac{1}{a}\delta_1$, $\Delta=a\Delta$, $\overline{\Delta}_1=\frac{1}{a}\Delta_1$, $\overline{R}=R+r$, $\overline{R}_1=R_1+r_1$, где a, r, r_1 удовлетворяют следующей системе уравнений [1]:

$$
\begin{gathered}
r\delta-r_1\Delta=\delta\left(k_{vv}+k_v^2+Pk_v+2k_v\frac{\partial\ln\delta}{\partial v}\right)-\Delta\left(k_{uu}+k_u^2+P_1k_u+2k_u\frac{\partial\ln\Delta}{\partial u}\right),\\
r_1\delta_1-r\Delta_1=-\delta_1\left(k_{uu}-k_u^2+P_1k_u+2k_u\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial u}\right)+\\
+\Delta_1\left(k_{vv}-k_v^2+Pk_v+2k_v\frac{\partial\ln\Delta_1}{\partial u}\right),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
r_u=(\delta\delta_1-\Delta\Delta_1)k_v,\qquad r_{1v}=-(\delta\delta_1-\Delta\Delta_1)k_u,
$$

причем $k = \ln a$ (коэффициенты P, P_1 и $\bar{P}$, $\bar{P_1}$ можно считать соответственно равными).

Можно убедиться, что не W-конгруенции с невырожденными фокальными полостями не допускают изгибания с функциональным произволом. Для таких конгруенций $\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 \neq 0$, $\delta\Delta\delta_1\Delta_1 \neq 0$, и поэтому, исключая из (2) r и r_1, мы получим:

$$\begin{aligned} &(\delta\delta_1 + \Delta\Delta_1) k_{vvu} - 2\delta_1\Delta k_{uuu} = \ldots, \\ &(\delta\delta_1 + \Delta\Delta_1) k_{uuv} - 2\delta\Delta_1 k_{vvv} = \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где невыписанные члены не содержат производных от k выше второго порядка.

Дифференцируя уравнения (3) двукратно, мы получим 6 уравнений 5-го порядка, причем детерминант при старших производных будет отличен от нуля. Отсюда следует, что класс конгруенций, проективно наложимых на данную, зависит самое большее от произвольных постоянных.

Для W-конгруенций $\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0$, P и P_1 можно свести к нулю и, положив $r = V(v)$, $r_1 = U(u)$, придать после простых преобразований уравнениям (2) следующий вид:

$$\begin{aligned} &\delta k_v^2 + \delta k_v \frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial v} - \Delta k_u^2 - \Delta k_u \frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial u} = V\delta - U\Delta, \\ &\delta \left(k_{vv} + k_v \frac{\partial \ln \delta\Delta_1}{\partial v} \right) - \Delta \left(k_{uu} + k_u \frac{\partial \ln \delta_1\Delta}{u} \right) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Исключая U и V из первого уравнения (4), мы придем к двум уравнениям 4-го порядка для k, если $\left(\ln \frac{\Delta}{\delta}\right)_{uv} \neq 0$, или к одному уравнению 3-го порядка, если $\left(\ln \frac{\Delta}{\delta}\right)_{uv} = 0$ (R-конгруенции). В обоих случаях необходимое условие изгибаемости с функциональным произволом будет иметь вид

$$\delta \left(k_v + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial v} \right)^2 - \Delta \left(k_u + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial u} \right)^2 = 0, \tag{5}$$

или, переходя к параметрам, определяющим конгруенцию (N_1N_2):

$$\bar{\delta} \left(\frac{\partial \ln \frac{\bar{\Delta}}{\bar{\delta}_1}}{\partial v} \right)^2 - \bar{\Delta} \left(\frac{\partial \ln \frac{\bar{\Delta}}{\bar{\delta}_1}}{\partial u} \right)^2 = 0.$$

Это, как известно, характеризует конгруенцию W с линейчатыми фокальными полостями. На изгибаемость конгруенций этого типа указал проф. С. П. Фиников ([2]).

В том, что эти конгруенции изгибаемы с функциональным произволом, можно убедиться, полагая в уравнениях (4) $k = \varphi\left(\frac{\Delta}{\delta_1}\right)$, $r = 0$, $r_1 = 0$. Тогда эти уравнения тождественно удовлетворятся в силу сделанных предположений и условий совместности таблицы (1) при любой функции φ. Отсюда вытекает

Теорема. *Единственные конгруенции с невырожденными фокальными полостями, допускающие изгибание с функциональным* *произволом, суть W-конгруенции с линейчатыми фокальными полостями и конгруенции, проективно наложимые на них.*

§ 2. Любая W-конгруенция, не принадлежащая линейному комплексу, проективно наложима на некоторую другую W-конгруенцию. Точнее, имеет место

Теорема. *Каждая W-конгруенция проективно наложима на конгруенцию, получаемую из нее коррелятивным преобразованием.*

Достаточно, действительно, положить $\bar{\delta}=\Delta_1$, $\bar{\delta}_1=\Delta$, $\bar{\Delta}=\delta_1$, $\bar{\Delta}_1=\delta$.

Тот же результат получается из следующих соображений: пусть $(N_1N_2)=K(M_1M_2)$, где K — коррелятивное преобразование. Если положить $K=PS$, где S — преобразование с помощью нуль-системы линейного комплекса, соприкасающегося с (M_1M_2) в луче M_1M_2, а P — проективное преобразование, то ввиду того, что $S(M_1M_2)=$ $=(M_1M_2)$ в окрестности 2-го порядка M_1M_2, мы в этой же окрестности получим $(N_1N_2)=P(M_1M_2)$, ч. и т. д.

Пользуясь термином, введенным Террачини, можно сказать, что для конгруенций W изгибание 1-го рода есть в то же время изгибание 2-го рода и наоборот ([3]).

Вообще говоря, нет оснований считать, что вышеуказанное наложение можно осуществить непрерывным изгибанием. Однако имеет место.

Теорема. *Всякая конгруенция, проективно наложимая на конгруенцию линейного комплекса, непрерывно изгибаема в эту конгруенцию и в свое коррелятивное преобразование.*

Так как в случае наложения на конгруенцию линейного комплекса $k=-\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta}{\delta_1}$, то условие, определяющее конгруенции, проективно наложимые на конгруенции линейного комплекса, имеет вид

$$\frac{1}{4}\,\delta\left(\frac{\partial\ln\frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{4}\,\Delta\left(\frac{\partial\ln\frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial u}\right)^2+V\delta-U\Delta=0. \tag{6}$$

Непрерывное изгибание такой конгруенции осуществится, если положить:

$$k_1=c\ln\frac{\Delta}{\delta_1},\qquad V_1=-(c^2+c)\,V,\qquad U_1=-(c^2+c)\,U.$$

При $c=-\frac{1}{2}$ получается конгруенция линейного комплекса, а при $c=-1$ коррелятивное преобразование исходной конгруенции.

Эти результаты приложимы к конгруенциям, наложимым на конгруенции с линейчатыми фокальными полостями, так как для них из (4) и (5) следует, что удовлетворяется (6). Эти конгруенции, обладая ∞^2 соприкасающихся линейных комплексов, налагаются на конгруенции с линейчатыми фокальными полостями, у которых ∞^1 соприкасающихся линейных комплексов, и на конгруенции линейного комплекса с единственным соприкасающимся линейным комплексом. Таким образом, при изгибании конгруенции с разным числом соприкасающихся линейных комплексов не образуют замкнутых классов, как это имеет место в особом случае Картана ([4]).

Отметим еще, что если понимать под основанием изгибания конгруенции систему линейчатых поверхностей, вдоль которых осуществимо наложение 3-го порядка, то единственными конгруенциями, имеющими основание изгибания, явятся конгруенции W с линейчатыми фокальными полостями. Основание изгибания совпадает у них с семейством поверхностей 2-го порядка (у которых, впрочем, только одно семейство образующих принадлежит конгруенции).

В заключение приношу благодарность проф. С. П. Финикову за ценную консультацию и внимание к настоящей работе.

Поступило
24 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937. [2] S. Finikoff, C. R., 199, 177 (1934). [3] Terracini, Ann. d. Scuola Norm. di Pisa, sér. 22, 75 (1933). [4] P. Mentré, C. R., 181, 495 (1925).