Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

О РАСШИРЕНИИ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕПЛОТНОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 X 1947)

1. Оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, будем называть эрмитовым, если

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

при любых f, $g \in \mathfrak{D}(A)$. Нас будут интересовать эрмитовы и, в частности, самосопряженные (гипермаксимальные) расширения $\tilde{A}$ оператора A.

Отметим, что расширения $\tilde{A}$ оператора A, для которого $\mathfrak{R}(A) \subset \overline{\mathfrak{D}(A)}$, будут обычными расширениями М. А. Наймарка ([1, 2]) с выходом в пространство $\mathfrak{H}$ из „естественного" для оператора A пространства $\overline{\mathfrak{D}(A)}$.

Эрмитовы расширения $\tilde{A}$ оператора A, для которых

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) \subset \overline{\mathfrak{D}(A)},$$

будем называть уплотняющими расширениями. Операторы, не имеющие уплотняющих расширений, будем называть полумаксимальными.

2. Для замкнутых эрмитовых операторов с неплотной областью определения верно основное в теории расширения эрмитовых операторов с плотной областью определения утверждение Дж. Неймана:

Теорема 1. *Замкнутый эрмитов оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, всегда допускает максимальные эрмитовы расширения в $\mathfrak{H}$.*

Самосопряженные (гипермаксимальные) расширения в $\mathfrak{H}$ замкнутый эрмитов оператор A допускает тогда и только тогда, когда равны его дефектные числа.

Уже из этой теоремы непосредственно следует, что у всякого допускающего замыкание эрмитова оператора есть самосопряженные расширения, — возможно, с выходом в расширенное пространство.

3. Будем обозначать через $\mathfrak{B}$ ортогональное дополнение к $\overline{\mathfrak{D}(A)}$ в $\mathfrak{H}$. Проекцию подпространства $\mathfrak{B}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ будем обозначать через $\mathfrak{M}_\lambda$.

Определим на элементах из $\mathfrak{M}_\lambda$ оператор V равенством

$$VP_{\mathfrak{N}_\lambda} h = P_{\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}} h, \qquad h \in \mathfrak{B}.$$

Оператор V, как легко видеть, изометричен.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый эрмитов оператор, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, с равными дефектными чис-*

лами. Общая форма его самосопряженных расширений $\tilde{A}$ *в пространстве* $\mathfrak{H}$ *дается формулой*

$$\tilde{A}(g+\varphi-U\varphi)=Ag+\bar{\lambda}\varphi-\lambda U\varphi, \quad g\in\mathfrak{D}(A), \quad \varphi\in\mathfrak{N}_\lambda,$$

где U *— оператор, изометрически отображающий дефектное подпространство* $\mathfrak{N}_\lambda$ *на дефектное подпространство* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ *и не принимающий ни на одном элементе из* $\mathfrak{M}_\lambda$ *того же значения, что оператор* V.

Оказывается, что каждый элемент f из области определения оператора $\mathfrak{D}(A)$, имеющий в силу теоремы 2 вид

$$f=g+\varphi-U\varphi, \quad g\in\mathfrak{D}(A), \quad \varphi\in\mathfrak{N}_\lambda,$$

однозначно определяет „порождающие" его элементы $g\in\mathfrak{D}(A)$ и $\varphi\in\mathfrak{N}_\lambda$.

Это следует из того, что равенство

$$g+\varphi+\psi=0$$

при $g\in\mathfrak{D}(A)$, $\varphi\in\mathfrak{N}_\lambda$, $\psi\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $h\in\mathfrak{B}$, что

$$P_{\mathfrak{R}(A-\lambda E)}h=\frac{1}{\bar{\lambda}-\lambda}(Ag-\lambda g), \quad \varphi=P_{\mathfrak{N}_\lambda}h, \quad \psi=-V\varphi.$$

Последнее утверждение дополняет два предложения М. А. Наймарка ([1], теоремы 8 и 9) о линейной зависимости элементов из $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}'_\lambda$ для эрмитовых операторов с неплотной областью определения.

4. Ортогональные дополнения к $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ в дефектном подпространстве $\mathfrak{N}_\lambda$ будем называть полудефектным подпространством оператора A и обозначать через $\mathfrak{N}'_\lambda$. Размерности полудефектных подпространств будем называть полудефектными числами.

Как и дефектные числа, полудефектные числа обладают свойством инвариантности: размерности полудефектных подпространств $\mathfrak{N}'_\lambda$ и $\mathfrak{N}'_\mu$ одинаковы, если λ и μ принадлежат одной (верхней или нижней) полуплоскости комплексной плоскости.

Теорема 3. *Замкнутый эрмитов оператор A полумаксимален тогда и только тогда, когда раствор* $\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda)$ *линейных множеств* $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ (см. [3]) *меньше единицы и одно из полудефектных чисел равно нулю.*

Отметим, что из $\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda)<1$ для некоторого λ ($\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$) следует, что $\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\mu)<1$ при всех μ ($\mathrm{Im}\,\mu\neq 0$).

Так как оператор V замкнут тогда и только тогда, когда раствор $\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda)<1$, то условие полумаксимальности эрмитова оператора можно формулировать и так:

Теорема 3''. *Замкнутый эрмитов оператор A полумаксимален тогда и только тогда, когда одно из его полудефектных чисел равно нулю и оператор V замкнут.*

На вопрос о том, у всякого ли эрмитова оператора существуют полумаксимальные расширения, ответ дается положительный. Однако не у всякого замкнутого эрмитова оператора есть замкнутые полумаксимальные расширения.

Теорема 4. *Для того чтобы эрмитов оператор A имел замкнутые полумаксимальные расширения, необходимо и достаточно, чтобы оператор V был замкнут.*

При помощи преобразования Кели замкнутого эрмитова оператора A легко установить общую форму его уплотняющих расширений $\tilde{A}$. Для того чтобы изометрическому расширению $\tilde{U}_\lambda$ преобразования Кели U_λ замкнутого эрмитова оператора A соответствовало по формуле

$$\tilde{A}=(\lambda\tilde{U}_\lambda-\bar{\lambda}E)(\tilde{U}_\lambda-E)^{-1}$$

уплотняющее расширение $\tilde{A}$ оператора A, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda)\cap\mathfrak{M}_\lambda=0$$

и чтобы оператор W, определенный на элементах f вида

$$f=\varphi+\psi, \quad \varphi\in\mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda), \quad \psi\in\mathfrak{M}_\lambda$$

равенством

$$W(\varphi+\psi)=\tilde{U}_\lambda\varphi+V\psi,$$

был изометричен. Или, иначе говоря, оператор $\tilde{A}$ будет уплотняющим расширением замкнутого эрмитова оператора A, если он определен на элементах f вида

$$f=g+\varphi-\bar{V}P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi-UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi$$

равенством

$$\tilde{A}f=Ag+\bar{\lambda}g-\lambda(\bar{V}P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi+UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi),$$

где $g\in\mathfrak{D}(A)$, φ — элемент из некоторого линейного подмножества $\mathfrak{U}$ дефектного подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ такого, что $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{M}_\lambda=0$, а U — изометрический оператор, определенный на $P_{\mathfrak{N}'_\lambda}\mathfrak{U}$ с множеством значений в полудефектном подпространстве $\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}}$.

5. Уплотняющие расширения — это частный вид расширений с заданным подпространством, в которое должна быть включена область определения расширенного оператора. Имеет место следующее предложение, которое полезно при рассмотрении расширений эрмитовых операторов, не допускающих замыкания:

Теорема 5. *Пусть A — замкнутый эрмитов оператор с областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Пусть $\mathfrak{D}$ — подпространство, содержащее $\mathfrak{D}(A)$.*

Тогда существуют такие замкнутые эрмитовы расширения $\tilde{A}$ оператора A, для которых

$$\overline{\mathfrak{D}(\tilde{A})}=\mathfrak{D}.$$

6. В некотором смысле противоположными уплотняющим расширениям оператора A будут самосопряженные расширения второго рода $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A, рассмотренные М. А. Наймарком в (1); М. А. Наймарк называет самосопряженное расширение $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A, действующего в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, с выходом в расширенное пространство $\mathfrak{H}'\supset\mathfrak{H}$ расширением второго рода, если

$$\mathfrak{D}(\tilde{A})\cap \quad =\mathfrak{D}(A).$$

М. А. Наймарком было показано существование расширений второго рода у эрмитовых операторов с плотной областью определения. Им были указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы операторы A_1 и U „определяли“ (см. ([1])) расширения второго рода замкнутого эрмитова оператора A с плотной областью определения.

Из наших рассмотрений (связанных с изучением оператора V) эти факты можно получить и для операторов с неплотной областью определения.

Институт математики
Академии Наук УССР

Поступило
14 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. мат., **4**, № 1 (1940). [2] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. мат., **4**, № 3 (1940). [3] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Усп. математ. наук, **2**, в. 3 (19) (1947).