Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ БАЗИСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 VII 1947)

Многообразие $\mathfrak{A}$ числовых последовательностей $a\equiv\{a_i\}$ мы будем называть пространством числовых последовательностей с единичным базисом (см. ([1])), если: 1) $\mathfrak{A}$ — пространство Банаха и 2) последовательность элементов $\eta_n\equiv\{\underbrace{0,\ldots,0}_{n-},1,0,\ldots\}$ $(n=1,2,\ldots)$ является базисом в $\mathfrak{A}$. Норму элемента a условимся обозначать через $|a|$ (вообще $|\eta_n|\neq 1$).

Пусть E— какое-нибудь пространство Банаха и $x_1,\ldots x_2,\ldots,x_n,\ldots$— последовательность элементов из E.

В ([1]) нами было доказано следующее предложение:

(A). Пусть для любой последовательности $\{a_i\}\in\mathfrak{A}$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_ix_i$ сходится слабо в E к некоторому элементу $x\in E$. Введем обозначение $L(a)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix_i=x$.

Тогда:

1°. Оператор $L(a)$ линеен.

2°. Ряд сходится сильно для любой последовательности $\{a_i\}$ из $\mathfrak{A}$.

§ 1. Предположим теперь, что: 1) E — сепарабельное пространство Банаха; 2) $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$ — полная последовательность в E; 3) ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_ix_i$ сходятся (сильно) для всех последовательностей $\{a_i\}\in\mathfrak{A}$.

Многообразие всех элементов $x\in E$ вида $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ обозначим буквой D. В силу (A) $x=L(a)$ — линейный оператор, отображающий $\mathfrak{A}$ на D. Так как $\{x_i\}$ — полная последовательность, то D всюду плотно в E.

Наконец, обозначим через B многообразие всех числовых последовательностей $b\equiv\{b_i\}$, для которых ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ia_i$ сходятся при всех $\{a_i\}\in\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность $\{x_i\}$ являлась базисом в E, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$F(x_i)=b_i\quad(i=1,2,\ldots)\tag{1}$$

имела решение относительно F для любой числовой последовательности $\{b_i\} \equiv b \in B$.

Докажем достаточность условия. Пусть F — линейный функционал на E. Тогда для любого $x \in D$ будем иметь: $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i F(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ и, таким образом, каждому $F \in \overline{E}$ соответствует линейный функционал $V(a) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i a_i$, определенный на $\mathfrak{A}$.

Введем для этого соответствия обозначение:

$$V = S(F); \tag{2}$$

S — оператор, сопряженный с $L(a)$. Так как, по условию, система уравнений (1) разрешима относительно F при любой последовательности $b \equiv \{b_i\} \in B$, то S отображает $\overline{E}$ на все $\overline{\mathfrak{A}}$. Далее, отображение (2) взаимно однозначно, так как если $S(F') = S(F'')$, то $F'(x_i) = F''(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и поэтому $F' = F''$ вследствие полноты последовательности $\{x_i\}$. Так как $L(a)$ — линейный оператор (см. (A)), то в этих условиях, на основании известной теоремы (2), существует оператор L^{-1}, причем L^{-1} — линейный оператор, определенный на всем E. Таким образом, $D \equiv E$ и, следовательно, всякий элемент $x \in E$ может быть представлен единственным образом в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, где $\{a_i\} \in \mathfrak{A}$.

С другой стороны, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ сходится, то последовательность $\{c_i\}$ содержится в $\mathfrak{A}$, так как оператор L^{-1} непрерывен и так как конечная последовательность $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ содержится в $\mathfrak{A}$ при любом n. Тем самым $\{x_i\}$ — базис в E.

Необходимость условия очевидна.

§ 2. Пусть E, попрежнему, сепарабельное пространство. Рассмотрим в E биортогональную систему

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$
$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots,$$

в которой $\{x_i\}$ — полная последовательность, а $\{F_i\}$ — тотальная.

Рассмотрим далее многообразие D всех элементов $x \in E$, для которых ряды $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) x_i$ сходятся, и условимся писать $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, где $a_i = F_i(x)$. В (3) было показано, что если ввести в D новую норму по формуле $\| x \|_* = \sup \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(x) x_i \right\|$, то получится полное пространство $\mathcal{E}$, в котором последовательность $\{x_i\}$ есть базис.

Обозначим через A многообразие числовых последовательностей $\{a_i\}$, для которых ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ сходятся. Нормируя элементы этого многообразия по формуле $| a | = \| x \|_*$, мы получим пространство числовых последовательностей $\mathfrak{A}$ с единичным базисом, изоморфное с $\mathcal{E}$.

Таким образом, последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет условиям 2) и 3) § 1, и мы приходим к следующему предложению:

Теорема 2. *Пусть $\{x_i\}$; $\{F_i\}$ — биортогональная система в E, в которой $\{x_i\}$ — полная последовательность, а $\{F_i\}$ — тотальная.*

Пусть A — многообразие всех числовых последовательностей $\{a_i\}$, для которых сходятся ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Тогда для того чтобы последовательность $\{x_i\}$ являлась базисом в E, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$F(x_i)=b_i \quad (i=1, 2, \ldots)$$

имела решение относительно F, какова бы ни была последовательность $\{b_i\}$, для которой ряды $\sum_{i=1}^{\infty} b_i a_i$ сходятся при всех $\{a_i\} \in A$.

Как пример приложения теоремы 1 приведем один признак базиса в гильбертовом пространстве.

Пусть H — сепарабельное пространство Гильберта и $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ — полная последовательность в H.

Теорема 3. *Если для любого элемента $x \in H$ выполняется условие*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2 < \infty \tag{3}$$

и если система уравнений

$$(x, x_i)=c_i \quad (i=1, 2, \ldots) \tag{4}$$

имеет решение для любой последовательности $\{c_i\}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty, \tag{5}$$

то $x_1, x_2, \ldots$ — базис в H.

Доказательство. Пусть $\{c_i\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (5). Тогда, вследствие (3), ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i (x, x_i)$ сходится при любом $x \in H$, т. е. ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ сходится слабо, какова бы ни была последовательность $\{c_i\}$, удовлетворяющая условию (5). Но тогда, ввиду слабой полноты пространства H и предложения (A) 2°, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ сходятся сильно для всех $\{c_i\}$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$. Наконец, так как система (4) разрешима при всех $\{c_i\}$, удовлетворяющих условию (5), то выполняются все условия теоремы 1 и поэтому $\{x_i\}$ — базис в E.

Поступило
29 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Гринблюм, ДАН, 21, № 9 (1938). [2] S. Banach, Théorie des opérations inéaires, p. 147, 1932. [3] М. М. Гринблюм, ДАН, 55, № 4 (1946).